शिवाजी विद्यापीठ, कोल्हापूर

दूरशिक्षण केंद्र

सांख्यिकीय आर्थिक विश्लेषण

(Statistics in Economic Analysis)

(शैक्षणिक वर्ष २०१९-२० पासून)

एम. ए. भाग-२ : सत्र-३

अर्थशास्त्र :

EC-5 (Compulsory Paper)

प्रती : १,०००

प्रकाशक :
डॉ. व्ही. डी. नांदवडेकर
कुलसचिव,
शिवाजी विद्यापीठ,
कोल्हापूर - ४१६ ००४.

मुद्रक :
श्री. बी. पी. पाटील
अधीक्षक,
शिवाजी विद्यापीठ मुद्रणालय,
कोल्हापूर-४१६ ००४.

ISBN-978-93-89327-65-6

★ दूरशिक्षण केंद्र आणि शिवाजी विद्यापीठ याबद्दलची माहिती पुढील पत्त्यावर मिळू शकेल.
शिवाजी विद्यापीठ, विद्यानगर, कोल्हापूर-४१६ ००४ (भारत)

दूरशिक्षण केंद्र, शिवाजी विद्यापीठ, कोल्हापूर

दूरशिक्षण केंद्र, शिवाजी विद्यापीठ, कोल्हापूर

प्रस्तावना

शैक्षणिक वर्ष २००७ पासून शिवाजी विद्यापीठ कोल्हापूर, यांच्या वतीने दूरशिक्षण केंद्रामार्फत बहिःस्थ विद्यार्थ्यांना दूरशिक्षण कार्यक्रम राबविण्यात येत आहे. त्या अनुषंगाने एम. ए. भाग-२ अर्थशास्त्र या वर्गाच्या विद्यार्थ्यांसाठी सन २०१८-१९ पासून सत्र पद्धती सुरू होत आहे. त्या अनुषंगाने 'सांख्यिकीय आर्थिक विश्लेषण' या विषयाचे स्वयंःअध्ययनासाठी हे पुस्तक सत्र ३ साठी लिहिले आहे. सदर पुस्तकाच्या लेखनासाठी शिवाजी विद्यापीठाच्या कार्यक्षेत्रातील पदव्युत्तर विभागात अध्ययन करणाऱ्या अनुभवी व तज्ञ लेखकांकडून या विषयाच्या अभ्यासक्रमानुसार असलेल्या विविध घटकांचे लेखन करून घेण्यात आले आहे. या पुस्तकातील विविध घटक लिहिताना साधी व सोपी भाषा, संकल्पनात्मक स्पष्टता, विषयाच्या आकलनासाठी तक्ते, कोष्टके, गणितीय सूत्रे, आकृत्या इत्यादींचा वापर केलेला आहे. वाचक व विद्यार्थ्यांना समजेल अशी विषयाची सोपी व सुटसुटीत मांडणी करण्यात आलेली आहे. प्रत्येक घटकाच्या शेवटी स्वयंःअध्ययन प्रश्न व त्यांची उत्तरे दिलेली आहेत. तसेच घटकाच्या शेवटी सरावासाठी स्वाध्याय, पारिभाषिक शब्द, क्षेत्रीय अभ्यासासाठी विषय व अधिक वाचनासाठी संदर्भ ग्रंथांची सूची दिलेली आहे.

सांख्यिकीय आर्थिक विश्लेषण या विषयातील वर्णनात्मक विश्लेषण, असममिती, परिबल आणि वशिंडता, सहसंबंध विश्लेषण, प्रतिपगमन विश्लेषण या घटकांचे सविस्तरपणे विश्लेषण केलेले आहे.

सांख्यिकीय आर्थिक विश्लेषण या पुस्तकामध्ये विविध घटकांच्या विवेचनात अचूकता आणण्याचा प्रयत्न केलेला आहे. परंतु त्यामध्ये कांही उणिवा असल्यास वाचक व विद्यार्थ्यांनी त्या आमच्या निदर्शनास आणून द्याव्यात. त्याचा उपयोग पुढील आवृत्ती अधिकाधिक सुधारित करण्यासाठी निश्चितपणे होईल. हे पुस्तक पदवी, पदव्युत्तर व विविध स्पर्धा परीक्षांच्या विद्यार्थ्यांना उपयुक्त ठरेल असा आम्हाला विश्वास आहे. सदर पुस्तक पूर्ण करण्यासाठी घटक लेखकांनी जे परिश्रम घेतले. त्याबद्दल घटक लेखकांना मनःपूर्वक धन्यवाद. पुस्तक प्रकाशनासाठी शिवाजी विद्यापीठाचे प्रशासकीय अधिकारी, कर्मचारी, दूरशिक्षण विभागातील सर्व अधिकारी व कर्मचारी यांनी जे परिश्रम घेतले त्याबद्दल त्यांचे मनःपूर्वक आभार.

■ संपादक ■

प्रा. एस. टी. कोंबडे
सहयोगी प्राध्यापक,
अर्थशास्त्र अधिविभाग,
शिवाजी विद्यापीठ, कोल्हापूर

डॉ. अनिलकुमार कृष्णराव वावरे
सहयोगी प्राध्यापक व विभागप्रमुख,
अर्थशास्त्र विभाग,
छत्रपती शिवाजी कॉलेज, सातारा

अभ्यास घटकांचे लेखक

लेखक	घटक क्रमांक
प्रा. शशिकांत पंडित पंचगल्ले अर्थशास्त्र विभाग, शिवाजी विद्यापीठ, कोल्हापूर	१, २, ३, ४

■ संपादक ■

प्रा. एस. टी. कोंबडे
सहयोगी प्राध्यापक,
अर्थशास्त्र अधिविभाग,
शिवाजी विद्यापीठ, कोल्हापूर

डॉ. अनिलकुमार कृष्णराव वावरे
सहयोगी प्राध्यापक व विभागप्रमुख,
अर्थशास्त्र विभाग,
छत्रपती शिवाजी कॉलेज, सातारा

अनुक्रमणिका

■ विद्यार्थ्यांना सूचना

प्रत्येक घटकाची सुरुवात उद्दिष्टांनी होईल. उद्दिष्टे दिशादर्शक आणि पुढील बाबी स्पष्ट करणारी असतील.

१. घटकामध्ये काय दिलेले आहे.

२. तुमच्याकडून काय अपेक्षित आहे.

३. विशिष्ट घटकावरील कार्य पूर्ण केल्यानंतर तुम्हाला काय माहीत होण्याची अपेक्षा आहे.

स्वयं मूल्यमापनासाठी प्रश्न दिलेले असून त्यांची अपेक्षित उत्तरेही देण्यात आलेली आहेत. त्यामुळे घटकाचा अभ्यास योग्य दिशेने होईल. तुमची उत्तरे लिहून झाल्यानंतरच स्वयं अध्ययन साहित्यामध्ये दिलेली उत्तरे पाहा. ही तुमची उत्तरे (किंवा स्वाध्याय) आमच्याकडे मूल्यमापनासाठी पाठवायची नाहीत. तुम्ही योग्य दिशेने अभ्यास करावा, यासाठी ही उत्तरे 'अभ्यास साधन' (Study Tool) म्हणून उपयुक्त ठरतील.

प्रिय विद्यार्थी,

हे स्वयंअध्ययन साहित्य या पेपरसाठी एक पूरक अभ्याससाहित्य म्हणून आहे. असे सूचित करण्यात येते की, विद्यार्थ्यांनी २०१८-१९ पासून तयार केलेला नवीन अभ्यासक्रम पाहून त्याप्रमाणे या पेपरच्या सखोल अभ्यासासाठी संदर्भपुस्तके व इतर साहित्याचा अभ्यास करावा.

घटक १

वर्णनात्मक विश्लेषण

(Descriptive Analysis)

१.० उद्दिष्टे :-

विद्यार्थी मित्रानों या घटकाच्या अध्ययनानंतर आपणास -

- केंद्रीय प्रवृत्तीची संकल्पना स्पष्ट होईल.
- केंद्रीय प्रवृत्तीच्या विविध परिमाणांचे मापन करता येईल.
- विचलनाच्या संकल्पनेचा अर्थ समजून घेता येईल.
- विचलनाच्या विविध परिमाणांचे मापन करता येईल.

१.१ प्रस्तावना :-

विद्यार्थी मित्रहो संशोधनाच्या सर्व टप्प्यांमध्ये तथ्यांचे किंवा माहितीचे विश्लेषण करणे सर्वात कुशल असे काम आहे. माहितीचे किंवा तथ्यांचे विश्लेषण आणि निर्वचनाच्या या महत्वाच्या टप्प्यामध्ये माहितीवर प्रक्रीया करणे, माहितीचे संपादन करणे, वर्गीकरण करणे, सारणीकरण करणे यांचा समावेश होतो. माहितीच्या विश्लेषणानंतर त्यांचा अर्थ लावणे किंवा निर्वचन करणे गरजेचे असते. माहितीचे योग्य प्रकारे निर्वचन आणि विश्लेषणासाठी संशोधकास विविध प्रकारच्या सांख्यिकीय पद्धती आणि तंत्राचे ज्ञान असणे आवश्यक असते. जेंव्हा मोठ्या प्रमाणावरील संख्यात्मक आकडेवारीचे सारणीकरण, विश्लेषण आणि पडताळा करणे गरजेचे असते. त्यावेळी संशोधनाच्या हेतुने सांख्यिकीय तंत्राचा किंवा पद्धतीचा वापर करणे उपयुक्त ठरते. याचा अर्थ असा की, संशोधकास विविध शास्त्रांतर्गत संशोधन करताना सांख्यिकीचे ज्ञान असणे गरजेचे असते. वस्तुस्थिती विषयक माहिती व ज्ञान अवगत

करण्यासाठी सांख्यिकीय पद्धतीचा उपयोग केला जातो. अर्थशास्त्र, कृषी, उद्योग, व्यापार, समाजशास्त्र, वैधकशास्त्र, शिक्षणशास्त्र यामध्ये तथ्यांचे विश्लेषण व निर्वचन करीत असताना सांख्यिकीय पद्धतीचा मोठ्या प्रमाणात वापर केला जातो. १८९० मध्ये अर्थतज्ञ आल्फ्रेड मार्टिन यांनी त्यांच्या पुस्तकात अर्थशास्त्रीय विश्लेषणात सांख्यिकीचे महत्त्व विशद केलेले आहे. एखाद्या देशाच्या अर्थव्यवस्थेमधील विविध आर्थिक प्रश्नांचे निराकरण करण्यासाठी आणि त्या प्रश्नांना समजून घेण्यासाठी सांख्यिकीय तंत्राचा उपयोग होतो. अर्थशास्त्र हे एक सामाजिक शास्त्र आहे त्यामुळे अर्थशास्त्रातील विविध शाखांमध्ये उदा. कृषी अर्थशास्त्र, औद्योगिक अर्थशास्त्र, श्रमाचे अर्थशास्त्र, लोकसंख्याशास्त्र, बँकिंग, वित्तीय बाजार, आंतरराष्ट्रीय अर्थशास्त्र, कल्याणाचे अर्थशास्त्र, पर्यावरणाचे अर्थशास्त्र इ. मध्ये संशोधन करीत असताना संशोधकाला किंवा नियोजनकाराला या विविध संख्याशास्त्रीय तंत्राचा अभ्यास करणे गरजेचे असते. म्हणजेच अर्थशास्त्रीय किंवा सामाजिक शास्त्रातील संशोधनात तथ्यांचे किंवा माहितीचे सांख्यिकीय विश्लेषण करण्यासाठी अनेक पद्धतीचा अवलंब केला जातो. त्यातील महत्त्वपूर्ण पद्धती म्हणजे केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे, विचलनाची परिमाणे, सहसंबंध विश्लेषण, प्रतिगमन विश्लेषण, संभाव्यता विवरण, कालमाला विश्लेषण, गृहीत कृत्याचे परिक्षण इ. होय. या विविध सांख्यिकीय पद्धतीच्या सहाय्याने संशोधकास संकलीत केलेल्या माहीतीवर किंवा तथ्यांवर प्रक्रीया करणे, वर्गीकरण करणे, सारणीकरण करणे आणि निर्वचन करणे शक्य होते आणि त्याआधारे संशोधन प्रकल्पाची किंवा विषयाची पडताळणी करण्यासाठी निष्कर्ष आणि अनुमान काढू शकतो. वरील विविध सांख्यिकीय तंत्रामधील केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे आणि विचलनाची परिमाणे या तंत्राबद्दल सखोल चर्चा या प्रस्तुत घटकात आपण करणार आहोत.

१.२ केंद्रीय प्रवृत्ती (Central Tendency)

१.२.१ अर्थ व संकल्पना

केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे 'केंद्रीय प्रवृत्ती' आणि 'परिमाणे' या दोन शब्दांचा संयोग आहे. मोठ्या प्रमाणावरील आकडेवारीमधून एक मूल्य किंवा संख्या जी संपूर्ण आकडेवारीचे प्रतिनिधीत्व करते किंवा करू शकते असे मूल्य किंवा संख्या म्हणजे 'केंद्रीय प्रवृत्ती' किंवा 'सरासरी' होय. केंद्रीय प्रवृत्तीच्या मदतीने ज्या विविध कारणामुळे आकडेवारीत बदल होत आहेत त्यांच्या कारणाचा शोध घेता येतो आणि विविध मूल्यांची तुलना करणे शक्य होते. सरासरी किंवा केंद्रीय प्रवृत्तीच्या सहाय्याने आकडेवारीची गुंतागुंत कमी करणे सोपे जाते आणि तुलना करता येते. केंद्रीय प्रवृत्ती किंवा सरासरीच्या व्याख्या पुढील प्रमाणे करता येतील.

केंद्रीय प्रवृत्तीच्या व्याख्या :

घोष आणि चौधरी यांच्या मते, ''सरासरी ही एक अशी साधी अभिव्यक्ती आहे की, ज्यामध्ये एक गुंतागुंतीचा गट किंवा समुह किंवा मोठ्या संख्याचे वास्तविक परिणाम केंद्रीत असेल.''

क्रोकसटन आणि काउडन यांच्या शब्दात, ''संपूर्ण वर्गाचे किंवा समुहाचे प्रतिनिधीत्व करणारी आणि केंद्रीय मूल्य व्यक्त करणारी सरासरी ही एक संख्या असते. संपूर्ण श्रेणीमध्ये ती कोठेतरी असते या संख्येला मध्यवर्ती किंवा केंद्रीय मूल्याचे मापक असे म्हणतात.''

थोडक्यात असे म्हणता येईल की, एखाद्या मध्यवर्ती संख्येच्या आजुबाजूला इतर संख्याची गोळा होण्याची प्रवृत्ती असते तीला केंद्रीय प्रवृत्ती असे म्हणतात.

१.२.२ सरासरीची उद्दिष्टे (Objectives of Averaging)

सरासरीची उद्दीष्टे पुढीलप्रमाणे आहेत.

१) **समुहाचे प्रतिनिधीत्व करणे :** सरासरी समुहातील सर्व वैशिष्ट्यांचे प्रतिनिधीत्व करते. म्हणजेच जर आपणास समुहापासून काही निष्पत्ती काढावयाची असेल तर ती सरासरीपासून काढता येते.

२) **माहितीचे संक्षिप्तीकरण करणे :** सरासरीच्या सहाय्याने आपणास संपूर्ण माहितीच्या मुख्य वैशिष्ट्याचे साधे आणि संक्षिप्त विवरण प्राप्त होते.

३) **तुलना करण्यास मदत करणे :** सरासरीच्या सहाय्याने संपूर्ण आकडेवारी एक मूल्य किंवा संख्येपर्यंत कमी करता येते ज्याचा उपयोग तुलनात्मक अभ्यास करण्यासाठी होतो. उदा. दोन देशाच्या प्रति व्यक्ती उत्पन्न किंवा दरडोई उत्पन्नाची तुलना करून आपण कोणता देश श्रीमंत आहे याबाबत निष्कर्ष काढू शकतो.

४) **धोरण निर्मिती करण्यासाठी मदत करणे :** सरासरीच्या सहाय्याने पेढीला व्यवसाय विकसित करण्यास मदत होते किंवा देशाच्या अर्थव्यवस्थेला विकसित करण्यात मदत होते.

५) **इतर सांख्यिकीय विश्लेषणाला आधार तयार करणे :** माध्य विचलन, प्रचरण गुणांक, सहसंबंध गुणांक, कालमाला विश्लेषण, निर्देशांक यासारखी इतर सांख्यिकीय साधने सरासरीवर आधारीत असतात.

१.२.३ चांगल्या सरासरीच्या आवश्यकता (Requisites of a Good Average)

आदर्श किंवा चांगल्या केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणात पुढील गुणधर्म असावे लागतात.

१) **सुलभता :** सरासरीचे मुलभूत वैशिष्ट्ये हे आहे की, सरासरी ही मापणास सोपी आणि अनुकरण करण्यासाठी सोपी असली पाहिजे.

२) **प्रतिनिधीत्व :** सरासरी ही संपूर्ण माहितीचे प्रतिनिधीत्व करणारी असली पाहिजे.

३) **कठोर परिभाषा :** सरासरी ही कठोरपणे परिभाषीत असली पाहिजे. तसे असल्यास त्याच्या मूल्यात अस्थिरता नसेल आणि नेहमी एका संख्येत त्याचे मूल्य असेल.

४) **बीजगणितीय प्रक्रीया :** सरासरी या पुढील बीजगणितीय प्रक्रीया करण्यासाठी सक्षम असल्या पाहिजेत.

५) **स्पष्ट आणि स्थिर व्याख्या किंवा परिभाषा :** चांगल्या सरासरीची व्याख्या ही स्पष्ट आणि स्थिर असली पाहिजे.

६) **परिपूर्ण संख्या :** चांगली सरासरी एक परिपूर्ण संख्या असावी.

७) **नमुन्यातील चढउताराचे परिणाम :** नमुन्यातील चढउतारामुळे सरासरी प्रभावित होऊ नये. उदाहरणार्थ जर भात उत्पादनाचे विविध नमुने घेतल्यास या नमुन्याचे माध्य किंवा सरासरी समान असावी.

८) **असममितीने प्रभावीत न होणे :** वितरणातील असममितीमुळे प्रभावीत न होणारी सरासरी चांगली सरासरी होय, याउलट, जर सरासरी असममितीमुळे प्रभावीत झाली तर ते योग्य प्रतिनिधीत्व नसेल.

९) **चलाच्या सर्व मूल्यांवर आधारीत :** जेव्हा एखादी सरासरी घटकाच्या सर्व मूल्यावर आधारीत असते तेव्हा खरे प्रतिनिधीत्व करते अन्यथा ती चांगली सरासरी नसते.

१०) **टोकाच्या मूल्याचा कमी प्रभाव :** चांगल्या सरासरीने अनावश्यक मूल्यांनी अयोग्यरित्या प्रभावीत होऊ नये. प्रभावीत झाल्यास ते खरे प्रतिनिधीत्व होणार नाही.

११) **आलेख पद्धतीने मूल्य शोधता येणे :** बीजगणितीय पद्धतीबरोबर आलेख पद्धतीने मूल्य शोधता येणारी सरासरी चांगली सरासरी असते.

१२) **खुल्या टोकाच्या वर्गांतरासाठी सरासरी काढता येणे :** अनेक वितरणात टोक हे खुले असतात म्हणून चांगली सरासरी त्यास म्हणता येईल जी खुल्या टोकाच्या वर्गांतरासाठी सुद्धा काढता येते.

१.३ केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे (Measures of Central Tendency) :-

केंद्रीय प्रवृत्तीचे परिमाण हा एक आकडा असतो जो संपूर्ण आकडेवारीचे प्रतिनिधीत्व करतो जी एका विशिष्ट संचामध्ये असते. अशा प्रकारच्या केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणाला केंद्रीय स्थितीचे मापक असे म्हणतात. केंद्रीय प्रवृत्तीच्या मापकामध्ये किंवा परिमाणामध्ये सर्वसाधारणपणे पुढील मापकांचा वापर केला जातो.

१. माध्य किंवा गणितीय माध्य (Arithmetic Mean or Average).

२. मध्यगा (Median).

३. बहुलक किंवा भूईष्टक (Mode).

४. भूमितीय माध्य किंवा भौमितीक माध्य (Geometric Mean).

५. संवादी माध्य (Harmonic Mean).

१.३.१ माध्य किंवा गणितीय माध्य (Arithmetic Mean or Average)

माध्य किंवा गणितीय माध्य हे संपूर्ण आकडेवारीचे प्रतिनिधीत्व करणारे सर्वात प्रसिद्ध मापक आहे. माध्य हे केंद्रीय प्रवृत्तीचे अत्यंत सोपे मापक किंवा परिमाण आहे. संकलीत केलेल्या आकडेवारीच्या सर्व मूल्यांची बेरीज करून त्या संख्येला एकूण घटकांच्या संख्येने भाग दिल्यास गणितीय माध्य किंवा माध्य मिळते. गणितीय माध्यास समांतर माध्य असेही म्हणतात. अशाप्रकारे गणितीय माध्य म्हणजे चलातील पदांच्या मूल्यांच्या बेरजेला त्यांच्या संख्येने भागणे होय.

$$\text{माध्य किंवा गणितीय माध्य} = \frac{\text{सर्व घटकांच्या मूल्यांची बेरीज}}{\text{घटकांची संख्या}}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$\overline{X}$ = माध्य किंवा गणितीय माध्य

$\sum X$ = सर्व घटकांच्या मूल्यांची बेरीज

N = घटकांची संख्या

गणितीय माध्य मापणाच्या पद्धती :-

सरासरीचे ज्ञान करून घेण्यासाठी सांख्यिकीय श्रेणीची आवश्यकता असते. अर्थशास्त्रामध्ये किंवा समाजशास्त्रीय संशोधनामध्ये सामान्यपणे तीन पदमाला किंवा श्रेणींचा वापर केला जातो. त्या श्रेणी किंवा पदमालातील गणितीय माध्य मापणाच्या पद्धती पुढीलप्रमाणे आहेत.

I) साध्या किंवा व्यक्तीगत पदमालेतील गणितीय माध्य.

II) खंडित पदमालेतील गणितीय माध्य.

III) संतत पदमालेतील गणितीय माध्य.

I) साध्या किंवा व्यक्तीगत पदमालेतील गणितीय माध्य

(Arithmetic Mean in Simple or Individual Series)

साध्या किंवा व्यक्तीगत पदमालेत किंवा श्रेणीमध्ये प्रत्येक संख्या व अंकाचे वेगवेगळे आकडे दिले जातात. म्हणजेच जेंव्हा व्यक्तीगत घटकांची मूल्ये दिलेली असतात, तेंव्हा त्या श्रेणीस व्यक्तीगत पदमाला किंवा श्रेणी असे म्हणतात.

उदाहरण : खालील आकडेवारीमध्ये १० व्यक्तीचे प्रतिदिन मिळणारे उत्पन्न रूपयामध्ये दिलेले आहे, त्याआधारे गणितीय माध्य काढा.

व्यक्ती	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
प्रतिदिन उत्पन्न	250	370	810	290	400	580	700	620	530	610

उत्तर : गणितीय माध्य काढताना प्रत्यक्ष किंवा अप्रत्यक्ष पद्धतीचा वापर केला जातो.

A) प्रत्यक्ष पद्धती (Direct Method) :

प्रत्यक्ष पद्धतीत गणितीय माध्य काढताना पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

वरील सूत्रामध्ये, $\overline{X}$ = द बार असे वाचले जाते

$\sum$ = सिग्मा किंवा समेशन (बेरीज)

$\sum X$ = घटकांच्या मूल्यांची बेरीज

N = घटकांची संख्या

सूत्राच्या सहाय्याने उदाहरण पुढीलप्रमाणे सोडविता येईल.

व्यक्ती	प्रतिदिन उत्पन्न
1	250
2	370
3	810
4	290
5	400
6	580
7	700
8	620
9	530
10	610
N = 10	$\sum x$ = 5160

गणितीय माध्य $\left(\overline{X}\right) = \frac{\sum X}{N}$

$$= \frac{5160}{10}$$

$\overline{X} = 516$ रू.

$\therefore$ गणितीय माध्य $\overline{X} = 516$ रू.

B) अप्रत्यक्ष पद्धती (Indirect Method) :

अप्रत्यक्ष पद्धतीस गृहीत माध्य पद्धती असे सुद्धा म्हणतात. अप्रत्यक्ष पद्धतीमध्ये आपणास सुरूवातीस दिलेल्या आकडेवारीस चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने लावावयास हवी. त्यानंतर सर्व मूल्यांच्या मध्यवर्ती मूल्याचा गृहीत माध्य मानून त्यापासून दिलेल्या प्रत्येक संख्येचे विचलन काढावे लागते. (उदा. विचलन = घटकाचे मूल्य - गृहीत माध्य) त्यानंतर खालील सूत्राचा वापर करून सूत्रात योग्य त्या किंमती ठेवून उत्तर काढावे लागते.

सूत्र : गणितीय माध्य $(\overline{X}) = A + \frac{\sum d}{N}$

वरील सूत्रात, A = गृहीत माध्य किंवा काल्पनिक माध्य

d = घटकांचे मूल्य - गृहीत माध्य $= X - A$

$\sum d$ = विचलनाची बेरीज

N = घटकांची संख्या

वरील सूत्राच्या मदतीने उदाहरण खालीलप्रमाणे सोडविता येईल. सर्वप्रथम सर्व घटकांचे मूल्य चढत्या क्रमाने मांडून घेऊ व 530 या मध्यवर्ती मूल्यापासून विचलन घेऊन.

व्यक्ती	प्रतिदिन उत्पन्न (X)	$d = X - A$
1	250	– 280
4	290	– 240
2	370	– 160
5	400	– 130
9	530	0
6	580	50
10	610	80
8	620	90
7	700	170
3	810	280
		$\sum d$ = – 140

येथे N = 10, A = 530, $\sum d$ = – 140

सूत्र $\overline{X} = A + \frac{\sum d}{N}$

$$= 530 + \frac{-140}{10}$$

$$= 530 - 14$$

$$\overline{X} = 516$$

II) खंडित पदमालेतील गणितीय माध्य (Arithmetic Mean in Discreate Series)

खंडित पदमालेला असंतत पदमाला असेही म्हणतात. जेव्हा मूल्यांची त्यांच्या वारंवारीतेसह मांडणी केली जाते तेव्हा त्या पदमालेस खंडीत पदमाला किंवा श्रेणी असे म्हणतात. या पदमालेत मूल्याची वारंवारीता म्हणजे एखादे मूल्य जितक्या वेळा येते तितकी संख्या मूल्याच्या समोर लिहीली जाते. खंडित पदमालेचे उदाहरण पुढीलप्रमाणे देता येईल.

उदाहरण : पुढे दिलेल्या आकडेवारीमध्ये अर्थशास्त्र विषयात विद्यार्थ्यांना मिळालेले गुण दर्शविले आहेत, त्याआधारे गणितीय माध्य काढा.

अर्थशास्त्र विषयाचे गुण	30	40	50	60	70	80	90
विद्यार्थी संख्या	5	6	10	20	15	8	6

उत्तर : खंडित पदमालेत गणितीय माध्य काढताना प्रत्यक्ष पद्धती किंवा अप्रत्यक्ष पद्धतीचा वापर केला जातो.

A) प्रत्यक्ष पद्धती (Direct Method) :

खंडीत पदमालेत प्रत्यक्ष पद्धतीने गणितीय माध्य काढताना पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

$$\overline{X} = \frac{\sum fX}{N}$$

वरील सूत्रामध्ये, $\overline{X}$ = गणितीय माध्य

f = घटकांची वारंवारिता

X = घटकाचे मूल्य

N = घटकांची संख्या

$\sum fX$ = वारंवारीता आणि घटकांच्या मूल्याच्या गुणाकाराची बेरीज

वरील सूत्राच्या सहाय्याने उदाहरण पुढीलप्रमाणे सोडविता येईल.

समजा अर्थशास्त्र विषयातील गुण म्हणजे X आणि विद्यार्थी संख्या म्हणजे f.

अर्थशास्त्र गुण (X)	**विद्यार्थी संख्या (f)**	**fX**
30	5	150
40	6	240
50	10	500
60	20	1200
70	15	1050
80	8	640
90	6	540
	N = 70	4320

वरील तक्त्यावरून N = 70 आणि $\sum fX$ = 4320 या किंमती सूत्रामध्ये ठेवून.

$$\overline{X} = \frac{\sum fX}{N}$$

$$= \frac{4320}{70}$$

$$\overline{X} = 61.71$$

$\therefore$ अर्थशास्त्र विषयातील विद्यार्थ्यांच्या गुणाचे गणितीय माध्य 61.71 आहे.

B) अप्रत्यक्ष पद्धती (Indirect Method)

खंडीत पदमालेत अप्रत्यक्ष पद्धतीने गणितीय माध्य काढताना पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

$$\overline{X} = A + \frac{\sum f dX}{N}$$

वरील सूत्रामध्ये, $\overline{X}$ = गणितीय माध्य

A = गृहीत माध्य

f = वारंवारीता

dX = गृहीत माध्यापासून मूल्याचे विचलन ()

$\sum f dX$ = वारंवारीता आणि गृहीत माध्यापासून मूल्याचे विचलन यांच्या गुणाकाराची बेरीज

$N = \sum f$ = घटकांची संख्या

अर्थशास्त्र विषयातील विद्यार्थ्यांचे गुण म्हणजे X आणि विद्यार्थी संख्या म्हणजे f मानून आणि गृहीत माध्य 60 मानून तक्ता पुढीलप्रमाणे लिहीता येईल.

X	***f***	***dx = (X – A)***	***fdX***
30	5	– 30	– 150
40	6	– 20	– 120
50	10	– 10	– 100
60	20	0	0
70	15	10	150
80	8	20	160
90	6	30	180
	N = 70		$\sum f dX$ = 120

वरील तक्त्यावरून A = 60, N = 70 आणि $\sum f dX$ = 120 हि मूल्ये पुढील सूत्रात ठेवून.

गणितीय माध्य, $\overline{X} = A + \frac{\sum f dX}{N}$

$$= 60 + \frac{120}{70}$$

$$= 60 + 1.71$$

$$\overline{X} = 61.71$$

$\therefore$ अर्थशास्त्र विषयातील विद्यार्थ्यांच्या गुणांचे गणितीय माध्य 61.71 आहे.

III) संतत पदमालेतील गणितीय माध्य (Arithmetic Mean in Continuous Series)

पदमालेचा तिसरा प्रकार म्हणजे संतंत पदमाला किंवा श्रेणी होय. या श्रेणीत किंवा पदमालेत विभिन्न घटकांचे मूल्य निश्चित संख्येमध्ये न देता ते वर्गांतरात (Class Intervals) दिले जाते. म्हणजेच या पदमालेत मूल्यांचे गट व त्यांची वारंवारीता दिलेली असते. संतत पदमालेत गणितीय माध्य काढताना सर्वप्रथम वर्गांतराचे वर्गमद्ये (Mid Value) काढावे लागते आणि संतत पदमाला खंडित पदमालेत रूपांतरीत करावी लागते. वर्गमध्ये काढताना वर्गांतरातील लघुत्तम मूल्य आणि महत्तम मूल्य यांची बेरीज करून त्याला दोनने (2) भाग द्यावा लागतो. वर्गांतराचा वर्गमध्य मिळाल्यानंतर त्याचा आणि संबंधित वारंवारीतेचा गुणाकार करावा लागतो व त्यानंतर सूत्राच्या सहाय्याने गणितीय माध्य काढता येतो.

उदाहरण : आकडेवारीच्या सहाय्याने एका महाविद्यालयातील प्राध्यापकांच्या वयाचे गणितीय माध्य काढा.

वय (वर्ष)	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
प्राध्यापकांची संख्या	1	3	4	7	8	9	2	1

उत्तर : संतत पदमालेत गणितीय माध्य काढताना प्रत्यक्ष पद्धती किंवा अप्रत्यक्ष पद्धतीचा वापर केला जातो.

A) प्रत्यक्ष पद्धती (Direct Method)

संतंत पदमालेत प्रत्यक्ष पद्धतीने गणितीय माध्य काढताना पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

गणितीय माध्य :

$$\overline{X} = \frac{\sum f M}{N}$$

वरील सूत्रामध्ये : $\overline{X}$ = गणितीय माध्य

f = वारंवारीता

M = वर्गमध्य

N = घटकांची संख्या किंवा वारंवारीतेची बेरीज ($\sum f$)

$\sum f M$ = वारंवारीता आणि वर्गमध्याच्या गुणाकाराची बेरीज

वरील सूत्राच्या सहाय्याने उदाहरण पुढीलप्रमाणे सोडविता येईल. वय म्हणजे X आणि प्राध्यापकांची संख्या म्हणजे f मानून वर्गमध्य काढून त्याचा वारंवारीतेसोबत गुणाकार करून fM काढावे.

X	f	M	f M
20-25	1	22.5	22.5
25-30	3	27.5	82.5
30-35	4	32.5	130.0
35-40	7	37.5	262.5
40-45	8	42.5	340.0
45-50	9	47.5	427.5
50-55	2	52.5	105.0
55-60	1	57.5	57.5
	35		1427.5

वरील तक्त्यावरून N = 35 आणि $\sum fM$ = 1427.5 या किंमती सूत्रामध्ये ठेवून

गणितीय माध्य,

$$\overline{X} = \frac{\sum fM}{N}$$

$$= \frac{1427.5}{35}$$

$$\overline{X} = 40.78$$

$\therefore$ कॉलेजमधील प्राध्यापकांच्या वयाचे गणितीय माध्य 40.78 आहे.

B) अप्रत्यक्ष पद्धती (Indirect Method)

संतत पदमालेत अप्रत्यक्ष पद्धतीत गणितीय माध्य काढताना पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

गणितीय माध्य,

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fM}{N}$$

वरील सूत्रामध्ये, $\overline{X}$ = गणितीय माध्य

A = गृहीत माध्य

f = वारंवारीता

d M = गृहीत माध्यापासून वर्गमध्याचे विचलन

$\sum fd$M = वारंवारीता आणि गृहीत माध्यापासून वर्गमध्याचे विचलन यांच्या गुणाकाराची बेरीज.

वरील सूत्राच्या सहाय्याने उदाहरण पुढीलप्रमाणे सोडविता येईल. वय म्हणजे X आणि प्राध्यापकांची संख्या f मानून वर्गमध्य M काढून त्याचे गृहीत माध्य (A) पासून विचलन काढून त्याचा आणि वारंवारीतेचा गुणाकार करून.

X	f	M	d M	$f\ d$ M
20-25	1	22.5	– 15	– 15
25-30	3	27.5	– 10	– 30
30-35	4	32.5	– 5	– 20
35-40	7	37.5	0	0
40-45	8	42.5	5	40
45-50	9	47.5	10	90
50-55	2	52.5	15	30
55-60	1	57.5	20	20
	N = 35			$\sum fd\text{M}$ = 115

वरील तक्त्यावरून N = 35, A = 37.5, $\sum fd\text{M}$ = 115 या किंमती सूत्रामध्ये ठेवून.

गणितीय माध्य $\overline{X} = \text{A} + \frac{\sum fd\text{M}}{\text{N}}$

$$\overline{X} = 37.5 + \frac{115}{35}$$

$$\overline{X} = 37.5 + 3.2$$

$$\overline{X} = 40.7$$

$\therefore$ कॉलेजमधील प्राध्यापकांच्या वयाचे गणितीय माध्य 40.7 आहे.

संतत श्रेणीच्या इतर काही विशेष बाबी (Other special cases of continuous series)

संतत श्रेणीच्या चार विशेषबाबी आहेत त्या पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. अपवर्जी पदमाला (Exclusive Series)

२. समावेशी पदमाला (Inclusive Series)

३. खुल्या टोकाचे वर्गांवर असलेली पदमाला (Open Ended Intervals Series)

४. संचयी पदमाला (Cumulative Series)

१) अपवर्जी पदमाला (Exclusive Series)

संतत पदमालेतील वर्गांतरामध्ये जेव्हा एका वर्गाची उच्च किंवा वरची मर्यादा ही पुढील वर्गाची निम्न किंवा खालची मर्यादा असते तेंव्हा त्या पदमालेस अपवर्जी पदमाला असे म्हणतात. उदाहरणार्थ : 10-20, 20-30, 30-40, 40-50, ... यासारखी पदमाला. या प्रकारच्या पदमालेतील गणितीय माध्य काढण्याची प्रक्रिया यापूर्वीच आपण अभ्यासली आहे.

२) समावेशी पदमाला (Inclusive Series)

संतंत पदमालेतील वर्गातरामद्ये जेंव्हा एका वर्गाची उच्च किंवा वरची मर्यादा हि पुढील वर्गाची निम्न किंवा खालची मर्यादा नसते तेव्हा त्या पदमालेस समावेशी पदमाला असे म्हणतात. उदाहरणार्थ 5-9, 10-14, 15-19, 20-24, 25-29, ... यासारखी पदमाला होय. अशा प्रकारच्या पदमालेत गणितीय माध्य काढताना एका वर्गाची उच्च मर्यादा ही पुढच्या वर्गाच्या निम्न मर्यादेमद्ये एक चा फरक असल्यामुळे आपणास सर्व वर्गाच्या निम्न मर्यादेतून 0.5 वजा करावे लागतात आणि उच्च मर्यादेत 0.5 मिळवावे लागतात. त्यामुळे आपणास समावेशी पदमालेचे अपवर्जी पदमालेत रूपांतर करणे शक्य होते.

समावेश पदमालेत गणितीय माध्य काढण्याची प्रक्रीया आपण पुढील उदाहरणाच्या सहाय्याने समजून घेऊया.

उदाहरण : पुढील दिलेल्या माहितीच्या आधारे गणितीय माध्य काढा.

वर्गांतर	4-6	7-9	10-12	15-19	20-24	25-29	22-24
वारंवारीता	1	3	7	15	11	3	2

उत्तर : समावेशी पदमालेत गणितीय माध्य काढण्याची सर्वप्रथम समावेशी पदमाला अपवर्जी पदमालेत रूपांतरीत करावी लागते.

समजा गृहीत माध्य (A) 14 मानून i = 3.

वर्गांतर	वर्गमध्य (M)	वारंवारीता (*f*)	*d* M	*f d M*
3.5-6.5	5	1	– 9	– 9
6.5-9.5	8	3	– 6	– 18
9.5-12.5	11	7	– 3	– 21
12.5-15.5	14	15	0	0
15.5-18.5	17	11	3	33
18.5-21.5	20	3	6	18
21.5-24.5	23	2	9	18
		N = 42		$\sum fd\mathrm{M} = 21$

वरील तक्त्यावरून, A = 14, N = 42, $\sum fd\mathrm{M} = 21$.

$$\overline{X} = \mathrm{A} + \frac{\sum fd\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$$

$$= 14 + \frac{21}{42}$$

$$= 14 + 0.5$$

$$\overline{X} = 14.5$$

$\therefore$ गणितीय माध्य 14.5 आहे.

३) खुल्या टोकाचे वर्गांतर असलेली पदमाला (Open Ended Intervals Series)

खुल्या टोकाचे वर्गातर असलेल्या पदमाला म्हणजे अशा पदमाला एकतर सुरूवातीच्या वर्गाची खालची मर्यादा किंवा शेवटच्या वर्गाची वरची मर्यादा किंवा दोन्ही दिलेले नसतात.

उदाहरण :

वर्गांतर	20 पेक्षा कमी	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70 पेक्षा जास्त
वारंवारीता	6	10	24	28	14	5	3

उत्तर : समजा सर्व वर्गाच्या वर्गांतराची लांबी 10 असेल तर सर्वात छोटे वर्गांतर 10-20 होईल आणि सर्वात मोठे वर्गांतर 70-80 होईल आणि समजा गृहीत माध्य (A) 45 मानले.

वर्गांतर (CI)	**वारंवारीता (*f*)**	**वर्गमध्य (M)**	***d* M**	***f d* M**
10-20	6	15	– 30	– 180
20-30	10	25	– 20	– 200
30-40	24	35	– 10	– 240
40-50	28	45	0	0
50-60	14	55	10	140
60-70	5	65	20	100
70-80	3	75	30	90
	N = 90			$\sum fd\text{M} = -290$

वरील तक्त्यावरून A = 45, $\sum fd\text{M} = -290$, N = 90.

सूत्र, $\overline{X} = \text{A} + \dfrac{\sum fd\text{M}}{\text{N}}$

$$= 45 + \frac{-290}{90}$$

$$= 45 - 3.22$$

$$\overline{X} = 41.78$$

$\therefore$ गणितीय माध्य 41.78 आहे.

४) संचयी पदमाला (Cumulative Series)

संचयी पदमाला दोन प्रकारच्या असतात.

१. पेक्षा लहान किंवा वर नाही (Less than or not above)

२. पेक्षा मोठा किंवा खाली नाही (More than or not below)

उदाहरण : खालील दिलेल्या माहितीच्या आधारे गणितीय माध्य काढा.

वर्गांतर	50 पेक्षा खाली	60 पेक्षा खाली	70 पेक्षा खाली	80 पेक्षा खाली	90 पेक्षा खाली	100 पेक्षा खाली
वारंवारीता	3	11	34	59	72	80

उत्तर : संचयी पदमालेत गणितीय माध्य काढताना सर्वप्रथम पदमालेचे अपवर्जी पदमालेत रूपांतर करावे लागते व त्यानंतर गणितीय माध्य काढावे लागते.

समजा गृहीत माध्य (A) 75 आहे.

वर्गांतर (CI)	**वारंवारीता (f)**	**वर्गमध्य (M)**	**d M**	**fd M**
40-50	3	45	– 30	– 90
50-60	8 = 11 – 3	55	– 20	– 160
60-70	23 = 34 – 11	65	– 10	– 230
70-80	25 = 59 – 34	75	0	0
80-90	13 = 72 – 59	85	10	130
90-100	8 = 80 – 72	95	20	160
	N = 80			190

वरील तक्त्यावरून A = 75, $\sum fd\text{M}$ = 190, N = 50.

सूत्र, $\overline{X} = \text{A} + \frac{\sum fd\text{M}}{\text{N}}$

$= 75 + \frac{-190}{80}$

= 75 – 2.375

$\overline{X} = 72.625$

$\therefore$ गणितीय माध्य 72.625 आहे.

उदाहरण : खालील माहितीच्या आधारे गणितीय माध्य काढा.

गुण	विद्यार्थी संख्या	गुण	विद्यार्थी संख्या
0 पेक्षा वर	80	60 पेक्षा वर	28
10 पेक्षा वर	77	70 पेक्षा वर	16
20 पेक्षा वर	72	80 पेक्षा वर	10
30 पेक्षा वर	65	90 पेक्षा वर	8
40 पेक्षा वर	55	100 पेक्षा वर	0
50 पेक्षा वर	43		

उत्तर : संचयी पदमालेत गणितीय माध्य काढताना सर्वप्रथम पदमालेचे अपवर्जी पदमालेत रूपांतर करावे लागते आणि त्यानंतर गणितीय माध्य काढावे लागते. समजा गृहीत माध्य (A) 55 आहे.

गुण (CI)	वारंवारीता (f)	वर्गमध्य (M)	d M	$f\,d$ M
0-10	3 = 80 – 77	5	– 50	– 150
10-20	5 = 77 – 72	15	– 40	– 200
20-30	7 = 72 – 65	25	– 30	– 210
30-40	10 = 65 – 55	35	– 20	– 200
40-50	12 = 55 – 43	45	– 10	– 120
50-60	15 = 43 – 28	55	0	0
60-70	12 = 28 – 16	65	10	120
70-80	6 = 16 – 10	75	20	120
80-90	2 = 10 – 8	85	30	60
	N = 80			$\sum fd\text{M} = -580$

वरील तक्त्यावरून, A = 55, $\sum fd\text{M}$ = – 580, N = 80

सूत्र, $\overline{X} = \text{A} + \dfrac{\sum fd\text{M}}{\text{N}}$

$$\overline{X} = 55 + \frac{-580}{80}$$

$$= 55 - 7.25$$

$$\overline{X} = 47.75$$

$\therefore$ गणितीय माध्य 47.75 आहे.

सोपान किंवा चरण विचलन पद्धती (Step Deviation Method)

गणितीय माध्य काढताना काही वेळा अप्रत्यक्ष पद्धतीमध्ये विचलन d M किंवा dX हे एका सामान्य संख्येने (h) भाग जाणारे असते. अशावेळी d M किंवा dx हे सामान्य संख्येने भाग देवून खुप छोटे किंवा संक्षिप्त करता येते. $\dfrac{d\text{M}}{h}$ किंवा $\dfrac{dX}{h}$ म्हणजेच d M' किंवा dX' असे संक्षिप्त रूप येते. अशावेळी माध्य काढण्याचे सूत्र हे पुढील प्रमाणे असते.

सूत्र, $\overline{X} = \text{A} + \dfrac{\sum fd\text{M}'}{\text{N}} \times i$

येथे $\overline{X}$ = गणितीय माध्य

A = गृहीत माध्य

f = वारंवारीता

N = $\sum f$ = एकूण संख्या

i = सामान्य संख्या

d M' = वर्ग गृहीत मध्यापासून वर्गमध्याचे विचलन घेऊन त्यास सामान्य संख्येने भाग दिल्यानंतर येणारी संख्या किंवा मूल्य

$\sum fd\text{M}'$ = वारंवारीता आणि यांच्या गुणाकाराची बेरीज.

उदाहरण : पुढील वारंवारीता वितरणापासून गणितीय माध्य काढा.

वर्गांतर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
वारंवारीता	7	10	15	10	8

उत्तर : समजा गृहीत माध्य (A0 25 मानून).

गुण (CI)	**वारंवारीता (*f*)**	**वर्गमध्य (M)**	***d* M**	***d* M'**	***f d* M'**
0-10	7	5	– 20	– 2	– 14
10-20	10	15	– 10	– 1	– 10
20-30	15	25	0	0	0
30-40	10	35	10	1	10
40-50	8	45	20	2	16
	N = 50				$\sum fd\text{M}' = 2$

वरील तक्त्यावरून, A = 25, N = 50, i = 10, $\sum fd\text{M}' = 2$.

सूत्र, $\overline{X} = \text{A} + \frac{\sum fd\text{M}'}{\text{N}} \times i$

$$= 25 + \frac{2}{50} \times 10$$

$$= 25 + \frac{20}{50}$$

$$= 25 + 0.4$$

$$\overline{X} = 25.4$$

$\therefore$ गणितीय माध्य 25.4 आहे.

गणितीय माध्याचे गुण-दोष (Merits and Demerits of Arithmetic Mean)

गुण (Merits) :

गणितीय माध्याचे गुण पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. गणितीय माध्याची गणना अतिशय साधी व सोपी आहे.

२. गणितीय माध्य काढण्याची प्रक्रीया हि निश्चित असते.

३. गणितीय माध्य हे दिलेल्या माहितीच्या सर्व निरिक्षणावर आधारीत असते.

४. गणितीय माध्य काढल्यानंतर प्रग गणितीय क्रिया किंवा बैजीक क्रीया करता येतात.

५. गणितीय माध्य हे नमुन्यातील बदलामुळे कमी प्रभावीत होते.

दोष (Demerits) :

गणितीय माध्याचे दोष पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. गणितीय माध्य हे निरक्षिणाच्या आधारे किंवा आलेखाद्वारे काढता येत नाही.

२. गणितीय माध्याचा महत्त्वाचा दोष म्हणजे महत्तम मूल्य आणि न्यूनत्तम मूल्य याचा गणितीय माध्यावर परिणाम होतो.

३. गणितीय माध्य हे केवळ संख्यात्मक सामग्रीसाठीच उपयोगी ठरते. गुणात्मक सामग्रीसाठी उपयोगी ठरत नाही जसे बुद्धीमत्ता, धुम्रपानाची सवय इ.

४. जेव्हा वर्गांतर हे खुले असतात तेव्हा गणितीय माध्य काढता येत नाही.

५. जर सामग्रीतील काही बाबी हरवल्या असतील किंवा ज्ञात नसतील तर गणितीय माध्य काढता येत नाही.

गणितीय माध्याचे वरीलप्रमाणे दोष असले तरीही अर्थसास्त्रीय संशोधनामध्ये सरासरी उत्पन्न किंवा दरडोई उत्पन्न, सरासरी नफा, सरासरी खर्च, मासिक विक्री, सरासरी प्राप्ती इ. चे मापन करताना गणितीय माध्याचा उपयोग होता. म्हणून गणितीय माध्याचे अर्थशास्त्रीय संशोधनाचे महत्त्व नाकारता येत नाही.

१.३.२ मध्यगा किंवा मध्यमान (Median)

विद्यार्थी मित्रहो आपणास माहित आहे की, गणितीय माध्य हे केवळ संख्यात्मक सामग्रीसाठीच उपयोगी ठरते. परंतु सुंदरता, प्रामाणिकपणा, बुद्धीमत्ता, वादविवाद इ. कौशल्यासारख्या गुणात्मक सामग्रीसाठी माध्याचा उपयोग होत नाही. गणितीय माध्याच्या या दोषावर मात करण्यासाठी मध्यगा आणि बहुलक याचा वापर केला जातो. मध्यगा ही कोणत्याही पदमालेतील असा बिंदू की, जो संपूर्ण श्रेणीला दोन समान भागामध्ये विभाजित करतो. म्हणजेच दिलेल्या एकूण मूल्यांची किंवा घटकांची मांडणी चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने केली असता बरोबर मध्यभागी येणाऱ्या घटकांच्या किंमतीस त्या सामग्रीची मध्यगा असे म्हणता येईल. केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणातील मध्यगा किंवा मध्यांक किंवा मध्यगा हे एक परिमाण आहे.

एल. आर. कोन्नर यांच्या मते, ''मध्यगा हे घटक श्रेणीमध्ये असे पदमूल्य आहे की, जे घटक श्रेणीला बरोबर दोन भागामध्ये विभाजन करते. त्यातील एका भागातील सर्व मूल्ये मध्यगा पेक्षा लहान असतात आणि दुसऱ्या भागातील सर्व मूल्ये मध्यगापेक्षा मोठी असतात.''

थोडक्यात असे म्हणता येईल की, दिलेल्या पदमालेतील सर्व घटकांची मांडणी चढत्या अगर उतरत्या क्रमाने केल्यास मध्यभागी येणारा घटक म्हणजे मध्यगा होय.

मध्यगा मापनाच्या पद्धती (Methods of Measuring Median)

मध्यगा मापनाच्या विविध श्रेणीतील पद्धती पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. साधी किंवा व्यक्तीगत पदमालेतील मध्यगा.

२. खंडित पदमालेतील मध्यगा.

३. संतत पदमालेतील मध्यगा.

१) साधी किंवा व्यक्तीगत पदमालेतील मध्यगा

(Median in Simple or Individual Series)

साध्या पदमालेत मध्यगा काढताना एकूण घटकांची संख्या सम किंवा विषम असू शकते. जर पदमालेतील घटकांची संख्या विषम असेल तर सर्वप्रथम त्या पदमालेतील सर्व घटक चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडले असता मध्यभागी येणारी संख्या मध्यगा असते. म्हणजेच जेव्हा पदमालेतील घटकांची संख्या (N) असते तेव्हा $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ या क्रमांकाच्या पदाचे मूल्य मध्यगा असते.

उदाहरण : खालील दिलेल्या माहितीच्या आधारे मध्यगा काढा.

35 37 38 49 24 28 55 43 41 22 29

उत्तर : या ठिकाणी घटकांची संख्या N = 11 विषम आहे. त्यामुळे आपण सर्वप्रथम दिलेली पदमाला चढत्या क्रमाने मांडून घेऊ.

22 24 28 29 35 37 38 41 43 49 55

मध्यगा (M) = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

= $\left(\frac{11+1}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

= $\left(\frac{12}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

= 6 व्या घटकाचे मूल्य

मध्यगा (M) = 37

दिलेल्या पदमालेत जर घटकांची संख्या सम असेल तर मध्यभागी एकच घटक न येता दोन घटक येतात. अशावेळी दिलेल्या पदमालेतील सर्व घटकांना चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडून मध्यभागी असलेल्या दोन घटकांच्या मूल्यांची बेरीज करून त्यास दोनने भागून सरासरी काढल्यास जे मूल्य मिळते त्यास मध्यगा असे म्हणतात. अशावेळी $\left(\frac{N}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य आणि $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य यापासून मध्यगा मूल्य काढले जाते.

उदाहरण : पुढील दिलेल्या आकडेवारीच्या सहाय्याने मध्यगा काढा.

12 25 18 11 29 22 28 32 44 35

उत्तर : या उदाहरणात घटकांची संख्या N = 10 सम आहे. त्यामुळे आपण सर्वप्रथम पदमाला चढत्या क्रमाने मांडून घेऊ.

11 12 18 22 25 28 29 32 35 44

मध्यगा $\left(\frac{N}{2}\right)$ व्या घटकांचे मूल्य व $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ व्या घटकांचे मूल्य याची सरासरी असते.

$\left(\frac{N}{2}\right)$व्या घटकांचे मूल्य = $\left(\frac{10}{2}\right)$ व्या घटकांचे मूल्य

= 5 व्या घटकाचे मूल्य

$\left(\frac{N}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य= 25

$\left(\frac{N}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य= $\left(\frac{10+1}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

= $\left(\frac{11}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

= 5.5 व्या घटकाचे मूल्य

$\left(\frac{N+1}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य = 28

म्हणजेच 5 व्या घटकाचे मूल्य = 25

6 व्या घटकाचे मूल्य = 28

म्हणून, मध्यगा (M) = मध्यभागच्या घटकाची सरासरी

$$= \frac{25+28}{2}$$

$$= \frac{53}{2}$$

$\therefore$ मध्यगा (M) = 26.5

२) खंडित पदमालेतील मध्यगा (Median in Discrete Series)

विद्यार्थी मित्रहो गणितीय माध्य काढताना आपण पाहिले की, ज्या पदमालेत मूल्यांची वारंवारीता दर्शविणारी संख्या दिलेली असते, त्यास खंडित पदमाला असे म्हणतात. खंडित पदमालेत मध्यगाचे मापन पुढील प्रमाणे करता येईल.

उदाहरण : पुढील आकडेवारीवरून महाविद्यालयीन विद्यार्थ्यांच्या उंचीची मध्यगा काढा.

उंची (इंच) (X)	61	62	64	66	65	67	63
विद्यार्थी संख्या (f)	11	20	10	18	17	13	21

उत्तर : प्रथम दिलेल्या पदमालेतील मूल्यांची मांडणी चढत्या क्रमाने करून संबंधित वारंवारीता लिहून वारंवारीतेच्या सहाय्याने संचित वारंवारीता काढणे. त्यानंतर $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ व्या घटकाच्या मूल्यावरून मध्यगा काढणे.

उंची (x)	**विद्यार्थी संख्या (f)**	**संचित वारंवारीता (f)**
61	11	11
62	20	31
63	21	52
64	10	62
65	17	79
66	18	97
67	13	110

सूत्र, मध्यगा, M = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$व्या घटकाचे मूल्य

= $\left(\frac{110+1}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

= $\frac{111}{2}$ व्या घटकाचे मूल्य

= 55.5 व्या घटकाचे मूल्य

M = 64

$\therefore$ मध्यगा = 64.

मध्यगेचे मूल्य संचित वारंवारितेत शोधताना सर्वप्रथम त्याच्यापेक्षा मोठे किंवा समान येणारे मूल्य शोधावे लागते आणि त्या मूल्याला अखोरेखीत करावे लागते. वरील उदाहरणात मध्यगा ५५.५ वा घटक आहे. त्याच्या व मोठी संचित वारंवारीता ६२ आहे. ६१ वा घटक ७४ असल्यामुळे मध्यगा ६४ एवढी आहे.

३) संतंत पदमालेतील मध्यगा (Median in Continuous Series)

विद्यार्थी मित्रहो आपणास माहिती आहे की, जेव्हा मूल्यांचे गट किंवा वर्ग व त्यांची संबंधित वारंवारीता दिलेली असते तेव्हा त्या पदमालेस संतत पदमाला असे म्हणतात.

संतत पदमालेत मध्यगा काढण्यासाठी पुढील सूत्राचा वापर केला जातो. संतंत पदमालेत मध्यगा काढण्यासाठी सर्वप्रथम मध्यगा गट शोधावा लागतो. त्यासाठी पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

मध्यगा गट किंवा वर्ग = $\left(\frac{N}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

मध्यगा गट किंवा वर्ग माहित केल्यानंतर पुढील सूत्राचा उपयोग करून मध्यगा मोजली जाते.

मध्यगा (M) = $(M) = L + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$

वरील सूत्रामध्ये,

L = मध्यगा गटातील न्यूनतूम मूल्य

N = $\sum f$ = एकूण घटकांची संख्या (वारंवारीता)

f = मध्यगा गटाची किंवा वर्गाची वारंवारीता

C = मध्यगा गटाच्या पूर्वीच्या गटाची संचित वारंवारीता

i = मध्यगा गटाचे किंवा वर्गाचे वर्गांतर (महत्तम मूल्य न्यूनत्तम मूल्य)

उदाहरण : आकडेवीरवरून एका कॉलेजमधील शिक्षकांच्या वयाची मध्यगा काढा.

वय (वर्ष)	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
शिक्षकांची संख्या	2	4	5	7	8	9	3	2

उत्तर : संतत पदमालेत मध्यगा काढण्यासाठी सर्वप्रथम मध्यगा गट किंवा वर्ग शोधावा लागतो. त्यासाठी दिलेल्या माहितीच्या आधारे संचित वारंवारीता काढावी लागते.

वय (X)	**शिक्षकांची संख्या (f)**	**संचित वारंवारीता (Cf)**
20-25	2	2
25-30	4	6
30-35	5	11
30-40	7	18
40-45	8	26
45-50	9	35
50-55	3	38
55-60	2	40
	$N = \sum f = 40$	

मध्यगा गट किंवा वर्ग = $\left(\frac{N}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

= $\left(\frac{40}{2}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

= 20 व्या घटकाचे मूल्य

मध्यगा गट किंवा वर्ग = 40 – 45

वरील तक्त्यात सर्वप्रथम 20 वा घटक ज्या गटात किंवा वर्गात आहे तो वर्ग किंवा गट शोधला पाहिजे. 20 वा घटक 40-45 या गटात आहे म्हणून मध्यगा गट किंवा वर्ग 40-45 आहे.

मध्यगा गट किंवा वर्ग शोधल्यानंतर त्या वर्गाची किंवा गटाशी संबंधित मूल्य काढूया.

$L = 40,\ f = 8,\ C = 18,\ \frac{N}{2} = 20,\ i = 5$

वरील किंमती मध्यगेच्या सूत्रात ठेवून,

मध्यगा, $M = L + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$

$$= 40 + \frac{20 - 18}{8} \times 5$$

$$= 40 + \frac{2}{8} \times 5$$

$$= 40 + \frac{1}{4} \times 5$$

$$= 40 + 1.25$$

$$M = 41.25$$

$\therefore$ मध्यगा = 41.25

संतत पदमालेत समावेशी पदमाला, खुल्या टोकाच्या श्रेणी आणि संचित पदमाला असतील तर त्या पदमालेचे सर्वप्रथम अपवर्जी पदमालेत रूपांतर करावे लागते व त्यानंतर वरीलप्रमाणे मध्यगेचे मापन करावे लागते.

मध्यगाचे गुण - दोष :

गुण :

मध्यगाचे गुण पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. मध्यगा काढण्याची प्रक्रीया ही निश्चित असते.

२. मध्यगा काढण्याची पद्धती ही अत्यंत सोपी व साधी असते.

३. गुणात्मक स्वरूपात असणाऱ्या आकडेवारी संदर्भात मध्यगा उपयोगी पडते.

४. मध्यगा आलेखाच्या सहाय्याने सुद्धा निर्धारीत करता येते.

५. मध्यगाचे मूल्य पदमालेतील महत्तम किंवा न्यूनत्तम मूल्यानी प्रभावीत होत नाही.

दोष :

मध्यगाचे दोष पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. मध्यगा पदमालेतील सर्व मूल्यांवर आधारीत नसते त्यामुळे त्याचे मूल्य प्रत्येक घटकाने प्रभावीत होत नाही.

२. मध्यगावर आधुनिक गणितीय क्रीया करता येत नाही.

३. दिलेल्या पदमालेच्या घटकांच्या मूल्यात फार मोठी तफावत असेल तर त्यापासून काढलेली मध्यगा योग्य प्रतिनिधीत्व करीत नाही.

१.३.३ बहुलक किंवा भूईष्टक (Mode)

विद्यार्थी मित्रहो आपणास माहित आहे की, गणितीय माध्यामध्ये काही दोष आहेत. जसे की, गणितीय माध्य हे टोकाच्या मूल्यांने सुद्धा प्रभावीत होते. अशा प्रकारच्या दोषाचे निराकरण करण्यासाठी केंद्रीय प्रवृत्तीचे आणखी एक परिमाण किंवा मापक म्हणजे बहुलक किंवा भूईष्टक होय. दिलेल्या पदमालेत सर्वात अधिक वेळा पुनरावृत्ती होणारे मूल्य म्हणजे बहुलक होय. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास पदमालेत जो घटक वारंवार आलेला किंवा आलेले दिसून येतात त्या घटकाच्या मूल्यास बहुलक असे म्हणतात.

क्रॉकस्टन आणि काउडेन यांनी बहुलकाची व्याख्या पुढीलप्रमाणे केली आहे. ''बहुलक हे पदमालेतील घटकांचे असे मूल्य आहे की ज्याच्या आसपास घटकांचे अधिकाधिक पदमूल्य केंद्रीत होतात.''

बहुलक मापनाची पद्धती :

साध्या पदमालेत प्रत्येक घटक एकाचवेळी आलेला असतो. त्यामुळे साध्या पदमालेत बहुलक नसतो. खंडित आणि संतंत पदमालेत बहुलक असतो. तेव्हा खंडित आणि संतत पदमाला असताना बहुलकाचे मापन कसे केले जाते ते पुढील संख्यात्मक उदाहरणाच्या सहाय्याने स्पष्ट करता येईल.

उदाहरण : उद्योग क्षेत्रात काम करणाऱ्या कामगारांना रोज मिळणारे वेतन पुढील आकडेवारीच्या रूपात दिले आहे. त्याआधारे बहुलक काढा.

140 120 80 140 150 110 150 110 150 90 120

उत्तर : वरील पदमालेत 150 ही संख्या सर्वाधिक वेळा म्हणजेच 3 वेळा आली आहे. म्हणून वरील पदमालेत बहुलक 150 आहे.

काहीवेळा एकाच पदमालेत दोन बहुलक असू शकतात. म्हणजेच पदमालेत दोन भिन्न आणि क्रमाने येणाऱ्या मूल्याची वारंवारीता सारखीच असते. तेव्हा अशाप्रकारच्या पदमालेस द्विबहुलक पदमाला असे म्हणतात. अशावेळी दोन्ही बहुलक मूल्यांची बेरीज करून त्याला 2 ने भाग देऊन बहुलक काढला जातो.

उदाहरण : खालील आकडेवारीवरून बहुलक काढा.

2 2 4 4 7 7 7 8 8 8 9 9 10 10

उत्तर : वरील पदमालेचे निरीक्षण केल्यास असे आढळून येते की, 7 व 8 ही दोन मूल्ये प्रत्येकी 3 वेळा आलेली आहेत. यावेळेस या दोन संख्यांची सरासरी म्हणजे बहुलक होय.

$$\text{बहुलक} = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

काहीवेळा आपणास एकाच पदमालेत दोन किंवा दोनपेक्षा अधिक बहुलक असलेले दिसून येतात तेव्हा अशा पदमालेस द्विबहुलक किंवा बहु-बहुलक पदमाला असे म्हणतात.

खंडीत पदमालेतील बहुलक (Mode in Discrete Series)

विद्यार्थी मित्रहो जेव्हा पदमाला ही खंडित पदमाला असते तेव्हा अशा पदमालेतील बहुलक केवळ निरिक्षणाद्वारे माहित करून घेता येतो. त्यासाठी पदमाला योग्य पद्धतीने मांडणी करून घ्यावी लागते. येथे ज्या मूल्याची वारंवारीता सर्वात जास्त आहे ते मूल्य बहुलक असते. परंतु ही पद्धती तेव्हाच उपयोगात आणता येते जेंव्हा.

१. वारंवारीतेच्या श्रेणीमध्ये हळूहळू प्रमाणात चढ किंवा उतार असतात.

२. सर्वोच्च वारंवारीता आणि त्यानंतरची सर्वोच्च वारंवारीता या खुप जवळ नसल्या पाहिजेत.

३. सर्वोच्च किंवा सर्वात मोठी वारंवारीतेची पुनरावृत्ती झाली नसली पाहिजे.

उदाहरण : खालील दिलेल्या माहितीच्या आधारे बहुलक काढा.

X	4	7	11	16	25
f	3	9	14	21	13

उत्तर : दिलेल्या मूल्यांची वारंवारीता पुढीलप्रमाणे आहे.

X	*f*
4	3
7	9
11	14
16	21
15	13

वरील पदमालेचे निरिक्षण केल्यावर असे आढळून येते की, 16 या मूल्याची वारंवारीता सर्वात जास्त म्हणजेच 21 आहे. म्हणून या पदमालेत बहुलकाचे मूल्य 16 आहे.

खंडित पदमालेत जेव्हा वारंवारितेच्या श्रेणीमध्ये खुप मोठ्या प्रमाणात चढ किंवा उतार असतात, सर्वोच्च वारंवारीता आणि त्यानंतरची सर्वोच्च वारंवारीता खुप जवळ असतात व सर्वोच्च वारंवारीतेची पुनरावृत्ती झालेली असेल अशावेळी बहुलक काढण्यासाठी निरिक्षण पद्धती उपयोगी पडत नाही त्यावेळी गट पद्धतीचा वापर करावा लागतो.

गट पद्धती (Grouping Method)

गट पद्धतीमध्ये आपणास गट तक्ता आणि विश्लेषण तक्ता तयार करावा लागतो. गट तक्ता आणि विश्लेषण तक्ता तयार करण्याची प्रक्रीया पुढीलप्रमाणे आहे.

१) गट तक्ता (Grouping Table)

गट तक्ता तयार करताना सहा टप्पे येतात ते पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. सर्व वारंवारीता विचारात घ्याव्या लागतात.

२. दोन-दोन वारंवारीतेचे गट करावे लागतात.

३. पहिली वारंवारीता सोडून दोन-दोन वारंवारीतेचे गट करावे लागतात.

४. तीन-तीन वारंवारीतेचे गट करावे लागतात.

५. पहिली वारंवारीता सोडून तीन-तीन वारंवारीतेचे गट करावे लागतात.

६. पहिल्या दोन वारंवारीता सोडून तीन-तीन वारंवारीतेचे गट करावे लागतात.

यातील प्रत्येक टप्प्यातून महत्तम बेरीज घेऊन त्यास वर्तुळाकार किंवा आयाताकृती चिन्हाने इतरापेक्षा वेगळे दर्शवावे लागते.

२) विश्लेषण तक्ता (Analysis Table) :

विश्लेषण तक्ता तयार करण्यासाठीचे टप्पे पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. प्रत्येक स्तंभातून महत्तम बेरजेची नोंद घ्यावी लागते.

२. हि बेरीज व्यक्तीगत किंवा जास्त घटकांची आहे ते तपासावे लागते.

३. जर बेरजेत 2 किंवा 3 वारंवारीता असतील तर अशा सर्व वारंवारीतेला ✓ किंवा ✗ खुण करावी लागते.

४. प्रत्येक स्तंभातील ✓ किंवा ✗ खुणा मोजाव्या लागतात.

५. ज्या चलाच्या पुढे सर्वाधिक ✓ किंवा ✗ खुणा असतील तो चल बहुलक असतो.

उदाहरण : खालील माहितीच्या आधारे बहुलक काढा.

X	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
f	6	8	9	14	15	17	8	7	5	2

उत्तर : दिलेल्या माहितीच्या आधारे निरिक्षण पद्धतीच्या सहाय्याने बहुलक काढता येत नाही कारण 17 ही सर्वोच्च वारंवारीता आहे. त्याजवळची वारंवारीता 16 आहे. म्हणून आपण गट पद्धती (Grouping Table) च्या सहाय्याने बहुलक काढूया.

गट तक्ता (Grouping Table)

X	*f* (I)	II	III	IV	V	VI
5	6	14				
10	8		17	23		
15	9	23			31	
20	14		30			39
25	16	33		47		
30	17		25		41	
35	8	15				32
40	7		12	20		
45	5	7			14	
50	2					

विश्लेषण तक्ता (Analysis table)

X	I	II	III	IV	V	VI	एकूण
5							
10							
15						✓	1
20			✓	✓		✓	3
25		✓	✓	✓	✓	✓	5
30	✓	✓		✓	✓		4
35					✓		1
40							
45							
50							

विश्लेषण तक्त्यात सर्वात जास्त ✓ खुणा या 25 या अंकासमोर असल्यामुळे या पदमालेचा बहुलक हा Z = 25 आहे.

बहुलकाचे किंवा भूईष्टकाचे गुण व दोष :

गुण : बहुलकाचे गुण पुढील प्रमाणे आहेत.

१. बहुलक समजण्यास व गणना करण्यास सोपा आहे.

२. बहुलक गुणात्मक प्रश्नांचा अभ्यास करताना उपयोगी पडतो.

३. बहुलक टोकाच्या मूल्यांने प्रभावीत होत नाही.

४. बहुलकाचे मापन आलेखाच्या सहाय्याने सुद्धा करता येते.

दोष : बहुलकाचे दोष पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. बहुलक काढण्याची प्रक्रीया ही निश्चित नसते तसेच त्याचे मूल्य नेहमीच निर्धारीत करता येत नाही.

२. बहुलकाचे मूल्य सर्व घटकांवर आधारीत नसते.

३. बहुलकावर आधुनिक गणितीय प्रक्रीया करता येत नाही.

४. जेव्हा वितरणाची संख्या कमी असते तेव्हा बहुलक काढला जात नाही.

१.३.४ हरात्मक किंवा संवादी माध्य (Harmonic Mean)

हरात्मक किंवा संवादी माध्य म्हणजे जेंव्हा मूल्याच्या एकूण संख्येला त्या मूल्याच्या व्यस्ताच्या बेरजेने भागले असता येणारे मूल्य होय. हरात्मक किंवा संवादी माध्य हे केंद्रीय प्रवृत्तीचे एक मापक आहे. मूल्याच्या व्यस्ताच्या गणितीय माध्याचे व्यस्त म्हणजेच संवादी किंवा हरात्मक माध्य होय.

हरात्मक माध्य काढण्याचे सूत्र पुढीलप्रमाणे आहे.

हरात्मक माध्य $$\text{H.M.} = \frac{\left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \ldots.. \frac{1}{X_n}\right)}{\text{N}}$$ ची व्यस्त.

सूत्रामध्ये, N = घटकांची संख्या.

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ = दिलेल्या पदमालेतील घटकांचे मूल्य.

हरात्मक माध्याचे मापन :

हरात्मक माध्याचे मापन पदमालाच्या तीन प्रकारामध्ये पुढीलप्रमाणे केले जाते.

१. साध्या पदमालेतील हरात्मक माध्य.

२. खंडित पदमालेतील हरात्मक माध्य.

३. संतत पदमालेतील हरात्मक माध्य.

१) साध्या किंवा व्यक्तीगत पदमालेतील हरात्मक माध्य

(Harmonic Mean in Simple or Individual Series)

समजा $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ हा निरिक्षणांचा संच आहे तर हरात्मक माध्य पुढील सूत्राच्या सहाय्याने काढता येईल.

$$\text{H.M.} = \frac{\left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \ldots\ldots \frac{1}{X_n}\right)}{N} \text{ ची व्यस्त}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \ldots\ldots \frac{1}{X_n}}{N}\right)}$$

$$= \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \ldots\ldots \frac{1}{X_n}}$$

$$\text{H.M.} = \frac{N}{\Sigma\left(\frac{1}{N}\right)}$$

येथे N हे निरिक्षणाची एकूण संख्या दर्शविते.

उदाहरण : खालील दिलेल्या घटकांचे हरात्मक माध्य काढा.

2 4 8 7 9

उत्तर : हरात्मक माध्याचे मापन.

X	$\frac{1}{x}$
2	0.500
4	0.250
8	0.125
7	0.143
9	0.111
N = 5	$\Sigma\frac{1}{X}$ = 1.129

$$\text{H.M.} = \frac{\text{N}}{\Sigma\left(\frac{1}{\text{N}}\right)}$$

$$= \frac{5}{1.129}$$

H.M. = 4.43

$\therefore$ हरात्मक माध्य 4.43 आहे.

२) **खंडित पदमालेतील हरात्मक माध्य (Harmonic Mean in Discrete Series)**

समजा X_1, X_2, X_3, ..., X_n हा निरिक्षणांचा संच आहे आणि f_1, f_2, f_3, ..., f_n या संबंधित वारंवारीता आहेत तेऱ्हा संवादी माध्य किंवा हरात्मक माध्य पुढील सूत्राच्या सहाय्याने काढता येते.

$$\text{H.M.} = \left[\frac{f_1\left(\frac{1}{X_1}\right) + f_2\left(\frac{1}{X_2}\right) + f_3\left(\frac{1}{X_3}\right) + ...f_n\left(\frac{1}{X_n}\right)}{\text{N}}\right] \text{ ची व्यस्त}$$

$$= \frac{1}{\left[\dfrac{f_1\left(\dfrac{1}{X_1}\right) + f_2\left(\dfrac{1}{X_2}\right) + f_3\left(\dfrac{1}{X_3}\right) + \ldots\ldots f_n\left(\dfrac{1}{X_n}\right)}{N}\right]}$$

$$= \frac{N}{f_1\left(\dfrac{1}{X_1}\right) + f_2\left(\dfrac{1}{X_2}\right) + f_3\left(\dfrac{1}{X_3}\right) + \ldots\ldots f_n\left(\dfrac{1}{X_n}\right)}$$

$$\text{H.M.} = \frac{N}{\Sigma f\left(\dfrac{1}{X}\right)} = \frac{N}{\Sigma\left(\dfrac{f}{X}\right)}$$

येथे N निरिक्षणांची एकूण संख्या दर्शविते.

उदाहरण : खालील दिलेल्या माहितीच्या आधारे हरात्मक माध्य काढा.

मूल्ये	2	6	10	14	18
वारंवारीता	4	12	20	9	5

उत्तर :

X	f	$\frac{f}{X}$
2	4	$\frac{2}{4} = 0.50$
6	12	$\frac{6}{12} = 0.50$
10	20	$\frac{10}{20} = 0.50$
14	9	$\frac{14}{9} = 1.55$
18	5	$\frac{18}{5} = 3.60$
	N = 50	$\Sigma\left(\frac{f}{X}\right)$ = 6.65

वरील तक्त्यावरून, N = 50, $\Sigma\left(\frac{f}{X}\right) = 6.65.$

हरात्मक माध्य, $H.M. = \frac{N}{\Sigma\left(\frac{f}{X}\right)} = \frac{50}{6.65}$

$H.M. = 7.52$

$\therefore$ हरात्मक माध्य 7.52 आहे.

३) संतत पदमालेतील हरात्मक माध्य (Harmonic Mean Continuous Series)

संतत पदमालेत हरात्मक माध्य काढण्यासाठी पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

$$H.M. = \frac{N}{\Sigma f\left(\frac{1}{M}\right)} = \frac{N}{\Sigma\left(\frac{f}{M}\right)}$$

येते N निरिक्षणांची एकूण संख्या दर्शविते.

उदाहरण : खालील माहितीच्या आधारे हरात्मक माध्य काढा.

मूल्ये	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
वारंवारीता	8	24	40	18	10

उत्तर :

X	f	M	f/M
10-20	8	15	0.533
20-30	24	25	0.960
30-40	40	35	1.143
40-50	18	45	0.400
50-60	10	55	0.182
	100		3.218

वरील तक्त्यावरून N = 100, $\Sigma\left(\frac{f}{X}\right) = 3.218$

$$H.M. = \frac{N}{\Sigma\left(\frac{f}{M}\right)}$$

$$= \frac{100}{3.218}$$

$$H.M. = 31.08$$

$\therefore$ हरात्मक माध्य 31.08 आहे.

हरात्मक माध्याचे गुण व दोष (Merits and Demerits of Harmonic Mean)

गुण :

हरात्मक माध्याचे गुण पुढील प्रमाणे आहेत.

१. हरात्मक माध्य हे पदमालेतील प्रत्येक घटकांच्या मूल्यावर आधारीत असते.

२. हरात्मक माध्य नमुना निवडीच्या बदलामुळे अधिक जास्त प्रभावीत होत नाहीत.

३. हरात्मक माध्य काढल्यानंतर प्रगत गणितीय प्रक्रीया करता येते.

४. हरात्मक माध्य हे गुणोत्तर आणि दर याची सरासरी काढण्यासाठी उपयुक्त आहे.

५. हरात्मक माध्य काढताना मोठ्या घटकांना अधिक भार दिला जात नाही.

दोष :

हरात्मक माध्याचे दोष पुढील प्रमाणे आहेत.

१. हरात्मक माध्याचे मोजमाप करणे अवघड आहे.

२. हरात्मक माध्य काढताना छोट्या घटकांना अधिक भार दिला जातो.

३. जर एखाद्या घटकाचे मूल्य शुन्य असेल तर हरात्मक माध्य काढता येत नाही.

४. हरात्मक माध्य हे एक असे मूल्य असते जे पदमालेत उपस्थित नसते.

१.३.५ भौमितीक किंवा भूमितीय माध्य (Geometric Mean)

भौमितीक किंवा भूमितीय माध्य म्हणजे एकूण सामग्रीच्या संख्येच्या गुणाकाराचे त्या संख्या एवढे मुळ (Root) होय. म्हणजेच सामग्रीमध्ये दोन संख्या असतील तर त्यांच्या गुणाकाराचे वर्गमूळ, जर तीन संख्या असतील तर त्यांच्या गुणाकाराचे घनमूळ आणि जर चार संख्या असतील तर त्यांच्या गुणाकाराचे चतुर्थ मुळ वगैरे होय. भौमितीक माध्य काढताना जेंव्हा एकूण घटकांची संख्या तीन पेक्षा जास्त असेल तर त्यांच्या गुणाकाराचे त्या संख्येएवडे मुळ काढणे कठीण काम आहे. तेव्हा अशा समस्येचे निराकरण करण्यासाठी लॉगॅरिथमचा उपयोग करून भौमितीक माध्याचे मापन केले जाते. म्हणजेच भौमितीक माध्य काढताना लॉग टेबलचा वापर केल्याने आकडेमोड सुलभ होते.

भौमितीक माध्य काढण्याचे सूत्र पुढीलप्रमाणे आहे.

भौमितीक माध्य, $\text{G.M.} = \sqrt[n]{X_1, X_2, X_3, \ldots.., X_n}$

सूत्रामध्ये, n = घटकांची संख्या

$X_1, X_2, X_3, \ldots.., X_n$ = दिलेल्या पदमालेतील घटकांचे मूल्य.

भौमितीक माध्याचे मापन

भौमितीक माध्याचे मापन पदमालाच्या तीन प्रकारामध्ये पुढीलप्रमाणे केले जाते.

१. साध्या पदमालेतील भौमितीक माध्य.

२. खंडीत पदमालेतील भौमितीक माध्य.

३. संतंत पदमालेतील भौमितीक माध्य.

१) साध्या पदमालेतील भौमितीक माध्य (Geometric Mean in Individual Series)

साध्या पदमालेत भौमितीक माध्य काढताना जर घटकांची संख्या मर्यादीत असेल तर सूत्राचा वापर केला जातो.

$$\text{G.M.} = \sqrt[n]{X_1, X_2, X_3, \ldots.., X_n}$$

आणि जर घटकांची संख्या जास्त असेल तर पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\left(\frac{\sum \log X}{\text{N}}\right)$$

येथे, N = घटकांची संख्या, log X = घटकांचे लॉग मूल्य

उदाहरण : पुढील दिलेल्या मूल्यांचे भौमितीक माध्य काढा.

2, 4, 8

उत्तर : भौमितीक माध्य, $\text{G.M.} = \sqrt[3]{X_1, X_2, X_3}$

$$= \sqrt[3]{2 \times 4 \times 8} \quad = \sqrt[3]{64}$$

G.M. = 4

$\therefore$ भौमितीक माध्य 4 आहे.

उदाहरण : पुढील मूल्यांचे भौमितीक माध्य काढा.

X	5	10	15	20	25	30	35	40

उत्तर : साध्या पदमालेत घटकांची संख्या जास्त असेल, म्हणजेच तीनपेक्षा जास्त असेल तर पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

भौमितीक माध्य, $\text{G.M.} = \text{Antilog}\left(\frac{\sum \log X}{\text{N}}\right)$

x	**log *X***
5	0.6989
10	1.0000
15	1.1760
20	1.3010
25	1.3979
30	1.4771
35	1.5440
40	1.6020
	10.1969

वरील तक्त्यावरून, N = 8, $\sum \log X$ = 10.1969

भौमितीक माध्य, $\text{G.M.} = \text{Antilog}\left(\frac{\sum \log X}{N}\right)$

$$= \text{Antilog}\left(\frac{10.1969}{8}\right)$$

$$= \text{Antilog } (1.2746)$$

$$\text{G.M.} = 18.82$$

$\therefore$ भौमितीक माध्य 18.82 आहे.

२) खंडित पदमालेतील भौमितीक माध्य (Geometric Mean in Discrete Series)

खंडित पजमालेत गणितीय माध्य काढताना सुरूवातीला प्रत्येक घटकाचे लॉगॅरिथम काढावे लागते व त्यानंतर आलेल्या लॉगॅरिथमला संबंधित वारंवारितेने गुणून $f \log X$ काढावे लागते व त्या गुणाकाराच्या बेरजेला ($\sum f \log X$) एकूण वारंवारीता किंवा एकूण घटक संख्येने भागून त्याचा Antilog काढल्यास भौमितीक माध्य मिळते.

उदाहरण : पुढील माहितीच्या सहाय्याने माध्य काढा.

x	20	30	40	50	60	70
f	8	12	20	10	6	4

उत्तर : दिलेल्या माहितीवरून

x	***f***	**log *X***	***f* log *X***
20	8	1.3010	9.3010
30	12	1.4771	17.7252
40	20	1.6020	32.0400
50	10	1.6989	16.9890
60	6	1.7781	10.6686
70	4	1.8450	7.3800
	N = 60		94.1038

वरील तक्त्यावरून

$N = 60$ व

$\sum f \log X = 94.1038$

सूत्र, भौमितीक साध्य,

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\left(\frac{\sum f \log X}{\text{N}}\right)$$

$$= \text{Antilog}\left(\frac{94.1038}{60}\right)$$

$$= \text{Antilog } (1.5683)$$

$$\text{G.M.} = 37.01$$

$\therefore$ भौमितीक माध्य 37.01 आहे.

३) संतत पदमालेतील भौमितीक माध्य (Geometric Mean in Continuous Series)

संतत पदामलेत भौमितीक माध्य काढताना सर्वप्रथम दिलेल्या माहितीवरून वर्गांचे व गटांचे वर्गमध्य किंवा गटमध्य काढावे लागते. त्यानंतर त्या वर्गमध्याचे लॉगॅरिथम काढावे लागते व त्यानंतर आलेल्या लॉगॅरिथमला संबंधित वारंवारितेने गुणून f log M काढावे लागते. त्यानंतर f log M च्या बेरजेला एकूण घटकसंख्या किंवा वारंवारितेने भागून त्याचा Antilog काढल्यास भौमितीक माध्य मिळते.

संतत पदामलेत भौमितीक माध्य काढण्याचे सूत्र पुढीलप्रमाणे आहे.

भौमितीक माध्य, $\text{G.M.} = \text{Antilog}\left(\frac{\sum f \log \text{M}}{\text{N}}\right)$

उदाहरण : खालील दिलेल्या माहितीच्या आधारे भौमितीक माध्य काढा.

गुण	वारंवारीता
4 - 8	6
8 - 12	10
12 - 16	18
16 - 20	30
20 - 24	15
24 - 28	12
28 - 32	10
32 - 36	6
36 - 40	2

उत्तर :

X	*f*	M	log M	*f* log M
4 - 8	6	6	0.7782	4.6692
8 - 12	10	10	1.0000	10.0000
12 - 16	18	14	1.1461	20.6298
16 - 20	30	18	1.2553	37.6590
20 - 24	15	22	1.3424	20.1360
24 - 28	12	26	1.4150	16.9800
28 - 32	10	30	1.4771	14.7710
32 - 36	6	34	1.5315	9.1890
36 - 40	2	38	1.5798	3.1596
	N = 109			137.1936

वरील तक्त्यावरून N = 109, $\sum f \log M$ = 137.1936

सूत्र, भौमितीक माध्य, $G.M. = \text{Antilog}\left(\frac{\sum f \log M}{N}\right)$

$$= \text{Antilog}\left(\frac{137.1936}{109}\right)$$

$$= \text{Antilog } (1.2587)$$

$$G.M. = 18.14$$

$\therefore$ भौमितीक माध्य 18.14 आहे.

भौमितीक माध्याचे गुण- दोष (Merits and Demerits of Geometric Mean)

गुण :

भौमितीक माध्याचे गुण पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. भौमितीक माध्य हे पदमालेतील प्रत्येक घटकाच्या मूल्यावर आधारीत असते.

२. भौमितीक माध्य ताठरपणे स्पष्ट करता येते.

३. विविध आर्थिक घटकांच्या बदलांच्या प्रमाणाचा अभ्यास भौमितीक माध्याच्या सहाय्याने करता येतो. उदा. लोकंख्या, लोकसंख्या वाढीचा दर अर्थव्यवस्थेतील विविध क्षेत्रातील बदल इ.

४. निर्देशांकाचे मोजमाप करताना भौमितीक माध्याचा वापर होतो.

दोष :

भौमितीक माध्यामध्ये असणारे दोष पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. भौमितीक माध्य काढण्याची पद्धती क्लीष्ट असल्यामुळे सामान्य माणसाला त्याचे आकलन होत नाही.

२. जर दिलेल्या पदमालेतील एखाद्या घटकाचे मूल्य शुन्य किंवा ऋण असेल तर भौमितीक माध्य या तंत्राचा वापर करता येत नाही.

आपली प्रगती तपासा - १

दिलेल्या पर्यायातून योग्य पर्याय निवडा.

१. संपूर्ण वर्गाचे किंवा समुहाचे प्रतिनिधीत्व करणारी .... ही एक संख्या असते.

(अ) माध्य (ब) सरासरी

(क) मध्यगा (ड) (अ) आणि (ब) दोन्ही

२. अर्थशास्त्रीय संशोधनात सामान्यपणे .... पदमालांचा वापर केला जातो.

(अ) एक (ब) दोन (क) तीन (ड) चार

३. मध्यगा दिलेल्या माहितीचे ...... समान भाग करते.

(अ) दोन (ब) चार (क) दहा (ड) शंभर

४. पदमालेत वारंवार आलेल्या घटकाचे मूल्यास .... म्हणतात.

(अ) माध्य (ब) सरासरी (क) मध्यगा (ड) बहुलक

५. केंद्रीय प्रवृत्तीच्या .... या परिमाणाच्या मापणात लॉगॅरिथमचा वापर केला जातो.

(अ) माध्य (ब) मध्यगा

(क) भौमितीक माध्य (ड) हरात्मक माध्य

आपली प्रगती तपासा - २

एक किंवा दोन वाक्यात उत्तरे द्या.

१. केंद्रीय प्रवृत्ती म्हणजे काय ?

२. गणितीय माध्य म्हणजे काय ?

३. मध्यगा म्हणजे काय ?

४. बहुलकाची व्याख्या करा.

५. वर्गमध्ये म्हणजे काय ?

१.४ अपस्करण किंवा विचलन (Dispersion)

विद्यार्थी मित्रहो आतापर्यंत आपण दिलेल्या माहितीच्या आधारे केंद्रीय प्रवृत्तीच्या विविध परिमाणांचे मूल्य कसे काढले जाते ते अभ्यासले. मध्यवर्ती किंवा केंद्रीय प्रवृत्ती एक अशी संख्या असते जी संपूर्ण माहितीचे प्रतिनिधीत्व करते, पण अशा मूल्यांमुळे वितरणातील केंद्रीय प्रवृत्ती लक्षात आली तरी तीच्या सहाय्याने माहितीमधील विचलन किंवा अपस्करण लक्षात येत नाही. अनेकवेळा दिलेल्या माहितीत संख्याचे किंवा मूल्यांचे माध्य सारखे असले तरी त्या संख्यात खुप मोठा फरक असलेला आढळून येतो. त्यामुळे फक्त माहितीची सरासरी माहित असणे पुरेसे नसून त्या माहितीत जो फरक असतो तो सुद्धा लक्षात घेतला पाहिजे. याचा अर्थ असा की, केंद्रीय प्रवृत्तीचे परिमाण पदमालेतील रचनेवर पुरेसा प्रकाश टाकू शकत नाही. तसेच या परिमाणाच्या सहाय्याने सर्व सामग्री मधील विचलन किंवा अपस्करण लक्षात येत नाही. यासाठी अपस्करण किंवा विचलनाचा अभ्यास महत्त्वाचा ठरतो. म्हणून या भागामध्ये आपण अपस्करण किंवा विचलन म्हणजे काय ? व त्याची विविध परिमाणे यांचा अभ्यास करणार आहोत.

१.४.१ अपस्करण - अर्थ व संकल्पना

केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणाच्या सहाय्याने माहितीचे प्रतिनिधीत्व करणारी एक संख्या आपणास मिळते परंतू ही मिळालेली संख्या माहितीमध्ये कशाप्रकारे बदल झालेला आहे किंवा कशाप्रकारे बदल होत गेलेला आहे त्याचे विवेचन करता येत नाही. तर त्यासाठी अपस्करण किंवा विचलन हे सांख्यिकीय साधन उपयोगी ठरते.

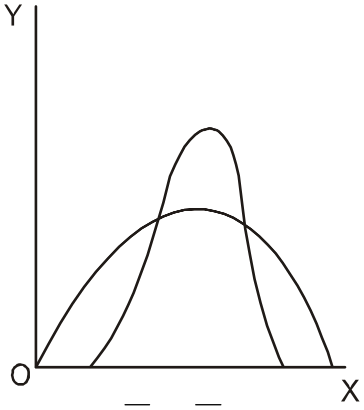
अपस्करण - अर्थ :

विचलन म्हणजे पदमालेतील विविध घटकांमधील गुणांच्या व आकारमानाच्या दृष्टीने असलेली भिन्नता किंवा फरकाचे परिमाण मोजण्याचे तंत्र होय. आपणास माहित आहे की, केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणाच्या सहाय्याने केवळ सरासरी मूल्य माहित होते. परंतु प्रत्येक घटकाचे मूल्य सरासरी मूल्यापेक्षा किती कमी व अधिक आहे ते समजत नाही. पदमालेतील सर्व पदे सरासरी मूल्यापासून किती भिन्न आहेत हे विचलनाच्या सहाय्याने मोजता येते. विचलनाची किंवा अपस्करणाची संकल्पना पुढील उदाहरणाच्या सहाय्याने स्पष्ट करता येईल.

		फलंदाजाच्या धावा		
		X	Y	Z
सामना	पहिला	0	100	100
	दुसरा	3	80	100
	तिसरा	297	120	100
	एकूण	300	300	300
	सरासरी	100	100	100

वरील उदाहरणावरून असे लक्षात येते की, प्रत्येक म्हणजेच तीनही फलंदाजांनी 100 च्या सरासरीने धावा काढल्या आहेत. परंतु यावरून हेही स्पष्ट होते की, तीनही फलंदाज सारख्याच पात्रतेचे आहेत असेही नाही. Z फलंदाजाने केलेल्या धावामध्ये सातत्य आहे म्हणजेच त्याने प्रत्येक सामन्यात केलेल्या धावा आणि सरासरी धावा यांच्यात कसलेही विचलन किंवा अपस्करण नाही. परंतु X फलंदाजाच्या बाबतीत काढलेल्या धावा आणि सरासरी धावा यामध्ये विचलन असलेले दिसून येते. तसेच त्यापेक्षा कमी विचलन Y या फलंदाजाच्या कामगिरीत दिसते. यावरून हे स्पष्ट होते की, फलंदाजाने सर्वसामान्यपणे काढलेल्या धावांची सरासरी महत्त्वाची नाही तर फलंदाजाने केलेल्या एकूण धावा आणि सरासरी धावा यामध्ये किती तफावत आहे हे अधिक महत्त्वाचे आहे. यावरून हे स्पष्ट होते की, Z फलंदाज हा अधिक स्थिर आहे, त्यानंतर Y फलंदाज व X फलंदाज सर्वात कमी स्थिर म्हणजेच अधिक अस्थिर आहे. त्यामुळे साहजिकपणे निवड समिती Z या फलंदाजाची निवड करेल. याचा अर्थ असा की, सरासरी महत्त्वाची नसते तर त्या संख्यांचे विचलन महत्त्वाचे असते.

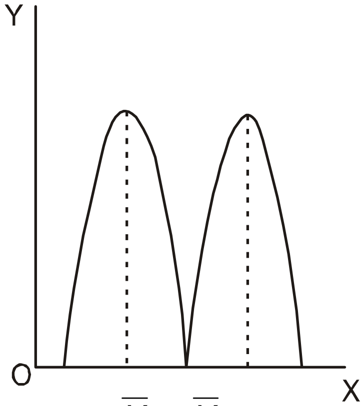
खालील आकृतीमध्ये विचलन आणि माध्य यांचा एकत्र विचार करून माहितीचे वितरण दर्शविले आहे. आकृती (१) मध्ये दोन पदमाला माध्य ($\overline{X}$) सारखेच आहे. पण त्याच्या वितरणामध्ये फरक आहे हे स्पष्ट होते. आकृती (२) मध्ये वितरणात, फरक नाही म्हणजेच वितरण सारखे आहे आणि त्यांची सरासरी सारखी आहे. आकृती (३) मध्ये वितरण आणि सरासरी दोन्हीमध्ये फरक असल्याचे लक्षात येते.



$\overline{X}_1 = \overline{X}_2$

वितरण भिन्न

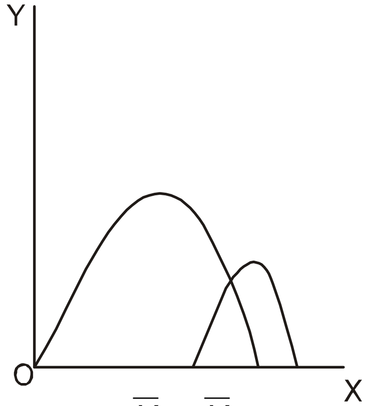
आकृती (१)



$\overline{X}_1 = \overline{X}_2$

वितरण सारखे

आकृती (२)



$\overline{X}_1 \neq \overline{X}_2$

वितरण भिन्न

आकृती (३)

याचा अर्थ असा की, दिलेल्या पदमालेची फक्त केंद्रीय प्रवृत्ती किंवा सरासरी विचारात घेऊन चालत नाही तर त्या पदमालेच्या विभाजनातील विचलनाचा सुद्धा विचार केला पाहिजे. विभाजनातील अपस्करण किंवा विचलन म्हणजे दिलेल्या मूल्यातील आणि केंद्रीय प्रवृत्ती किंवा सरासरीतील फरकाचा अभ्यास होय. अशा प्रकारचा अभ्यास करताना त्या पदमालेत किती विचलन आहे आणि किती प्रमाणात आहे याचा विचार करतो. ते कोणत्या दिशेने आहे याला महत्त्व नसते. म्हणून पुढील अभ्यासासाठी आणि विश्लेषणासाठी विचलनाचे मापन करणे गरजेचे असते.

अपस्करणाच्या व्याख्या :

जी. एल. कोन्नर यांच्या मते, ''ज्या मर्यादेपर्यंत व्यक्तीगत पदमूल्यात भिन्नता किंवा तफावत असते त्याच्या मापनास विचलन किंवा अपस्करण असे म्हणतात.''

डॉ. ए. एल. बाउलेंच्या मते, ''विचलन किंवा अपस्करण हे पदांच्या तफावतीचे मापक आहे.''

वरील व्याख्यावरून हे स्पष्ट होते की, पदमालेतील घटकांच्या प्रतिनिधीपासून प्रत्येक घटक किती विखुरलेला आहे हे शोधणे म्हणजे विचलन होय.''

१.४.२ अपस्करण किंवा विचलन मापनाची उद्दिष्ट्ये (Objectives of Measurement of Dispersion)

अपस्करणाची उद्दिष्ट्ये पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. दिलेल्या पदमालेत सरासरीची सत्यता पडताळून पाहण्यासाठी विचलनाचा उपयोग केला जातो याचा अर्थ असा की, विचलनाचे मूल्य जेवढे कमी असते जेवढी सरासरी किंवा माध्य आणि दिलेल्या मूल्यांतील तफावत कमी असते. याउलट विचलनाचे मूल्य जेवढे अधिक असते तेवढी सरासरी किंवा माध्य आणि दिलेल्या मूल्यांतील तफावत अधिक असते.

२. विचलनाच्या मदतीने दिलेल्या मूल्यात आणि सरासरीत कोणत्या कारणाने तफावत निर्माण झाली आहे हे लक्षात येते. म्हणजेच विचलनाच्या सहाय्याने या कारणाचा शोध घेता येतो. तसेच विचलनाच्या स्वरूपाचा अभ्यास करता येतो. उदाहरणार्थ डॉक्टर रोग्याच्या तापमानातील, रक्तदाबातील फरक लक्षात घेऊन आजाराचे निदान करतात व कारण शोधतात. सामाजिक शास्त्रामध्ये उत्पन्नातील फरक, वेतनातील फरक, विद्यार्थ्यांच्या गुणातील फरक लक्षात घेतला जातो त्यासाठी विचलनाच्या मोजमापाचा अभ्यास महत्त्वाचा ठरतो.

३. दोन किंवा अधिक पदमालांच्या विभाजनाचा अभ्यास करण्यासाठी विचलनाचा अभ्यास महत्त्वाचा असतो. मूल्यांच्या स्थिरतेच्या किंवा अस्थिरतेच्या अभ्यासासाठी विचलनाचा आधार घ्यावा लागतो. कारण अधिक विचलन म्हणजे अधिक अस्थिरता किंवा कमी स्थिरता होय. याउलट कमी विचलन म्हणजे अधिक स्थिरता किंवा कमी स्थिरता होय. याउलट कमी विचलन म्हणजे अधिक स्थिरता किंवा कमी अस्थिरता होय.

४. विचलनाचा अभ्यास अनेक सांख्यिकीय प्रक्रीयांसाठी उपयोगी ठरतो. उदा. गृहीतांची चाचणी, विचलनाचे विश्लेषण, उत्पादन नियंत्रण, गुणवत्ता नियंत्रण व खर्च नियंत्रण इ. चा अभ्यास करताना विचलन तंत्र उपयोगी पडते.

१.४.३ आदर्श / चांगल्या अपस्करण मापकाचे गुणधर्म (Characteristics of Ideal Measure of Dispersion)

आदर्श किंवा चांगल्या अपस्करण मापकाचे किंवा परिमाणाचे गुणधर्म किंवा वैशिष्ट्ये पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. अपस्करण परिमाण हे समजावयास सोपे असले पाहिजे.

२. अपस्करण परिमाणाची गणना करणे सोपे असले पाहिजे.

३. अपस्करण परिमाण हे श्रेणीच्या किंवा पदमानेच्या प्रत्येक घटकावर किंवा निरिक्षणावर आधारीत असले पाहिजे.

४. अपस्करण परिमाणाची व्याख्या निश्चित असली पाहिजे.

५. अपस्करण परिमाणावर प्रगत गणितीय किंवा बैजीक क्रीया करता आली पाहिजे.

१.५ अपस्करणाची परिमाणे (Measures of Dispersion)

अपस्करणाचा किंवा विचलनाचा अभ्यास करताना प्रामुख्याने विचलनाचे दोन भाग पडतात.

(१) निरपेक्ष परिमाण (Absolute Deviation)

(२) सापेक्ष परिमाण (Relative Deviation)

निरपेक्ष विचलनाचा अभ्यास तेंव्हाच उपयोगी पडतो जेव्हा भिन्न पदमालेतील मोजमापनाचे एकक सारखे असते. उदा. दोन भिन्न उद्योगातील कामगारांचे वेतन रूपयात दिलेले असेल तर निरपेक्ष विचलनाच्या मदतीने तुलना करता येते.

सापेक्ष विचलनाचा अभ्यास तेव्हाच उपयोगी पडतो जेव्हा भिन्न पदमालेतील मोजमापनाचे एकक भिन्न असते. उदा. दोन भिन्न उद्योगातील कामगारांचे वेतन भिन्न एककामध्ये असेल, तर सापेक्ष विचलनाच्या मदतीने तुलना करता येते. सापेक्ष विचलनात गुणांक किंवा प्रमाण काढले जाते. निरपेक्ष विचलनापेक्षा सापेक्ष विचलनाचा अधिक विचार केला जातो.

विचलनाची परिमाणे पुढीलप्रमाणे आहेत.

१) विस्तार

२) चतुर्थक विचलन

३) माध्य विचलन

४) प्रमाण विचलन

१.५.१ विस्तार (Range)

दिलेल्या पदमालेतील महत्तम मूल्य आणि न्यूनत्तम मूल्य यातील फरकाला विस्तार असे म्हणतात. विस्तार ही विचलन मापनाची सर्वात सोपी आणि साधी पद्धती म्हणून ओळखली जाते.

कोणत्याही पदमालेतील उच्चत्तम आणि न्यूनत्तम पदातील अंतरास विस्तार असे म्हणतात. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास पदमालेतील सर्वात मोठे मूल्य आणि सर्वात लहान मूल्य यांच्यातील फरकाला विस्तार असे म्हणतात.

सूत्र रूपात, विस्तार, $R = X_L - X_S$

येथे, R = विस्तार

X_L = पदमालेतील सर्वात मोठे मूल्य

X_S = पदमालेतील सर्वात लहान मूल्य

विस्तार हे विचलनाचे निरपेक्ष मापक किंवा परिमाण आहे.

विस्तार गुणांक,

$$\text{विस्तर गुणांक} = \frac{X_L - X_S}{X_L + X_S}$$

विस्तार गुणांक हे विचलनाचे सापेक्ष मापक किंवा परिमाण आहे.

विस्तार मापनाच्या पद्धती :

१) साध्या किंवा व्यक्तीगत पदमालेतील विस्तार

२) खंडित पदमालेतील विस्तार

३) संतत पदमालेतील विस्तार

१) साध्या किंवा व्यक्तीगत पदमालेतील विस्तार

साध्या किंवा व्यक्तीगत पदमालेत विस्तार व विस्तार गुणाक काढण्यासाठी सर्वप्रथम पदमालेतील सर्वात मोठे मूल्य (X_L) आणि पदमालेतील सर्वात लहान मूल्य (X_S) माहित करून घ्यावे लागते व त्यानंतर सूत्राचा वापर करून विस्तार व विस्तार गुणांक काढला जातो.

उदाहरण : पुढील तक्त्यात २०११ ते २०१५ याकाळातील X वस्तूच्या किंमती दिलेल्या आहेत त्याआधारे विस्तार व विस्तार गुणांक काढा.

वर्ष	2011	2012	2013	2014	2015
X वस्तूची किंमत (रू.)	210	220	260	250	270

उत्तर : दिलेल्या आकडेवारीवरून 270 हे सर्वात मोठे मूल्य (X_L) आणि 210 हे सर्वात लहान मूल्य (X_L) आहे.

म्हणजेच, $X_L = 270$, $X_S = 210$

विस्तार, $R = X_L - X_S$

$= 270 - 210$

$R = 60$

वरील दिलेल्या पदमालेतील विचलन 50 एवढे आहे. परंतु दिलेल्या पदमालेतील विविध घटकाच्या मूल्यांमध्ये तुलना करण्यासाठी सापेक्ष परिमाणाची गरज आहे. म्हणजेच तुलनात्मक बाबीने पाहण्याकरीता या मूल्याला सापेक्ष मूल्यात रूपांतरीत करणे गरजेचे असते. विस्तार मापनाच्या सापेक्ष परिमाणाला विस्तार गुणांक असे म्हणतात. विस्तार गुणांक दिलेल्या पदमालेतील सर्वात मोठे मूल्य (X_L) आणि सर्वात लहान मूल्य (X_S) यातील फरकाचे या दोन्ही मूल्याच्या बेरजेशी असलेले गुणोत्तर होय.

विस्तार गुणांकाचे सूत्र,

विस्तर गुणांक $= \dfrac{X_L - X_S}{X_L + X_S}$

$= \dfrac{270 - 210}{270 + 210}$

$= \dfrac{60}{480}$

विस्तार गुणांक = 0.13

२) खंडित पदमालेतील विस्तार

खंडित पदमालेत विस्तार व विस्तार गुणांक काढण्यासाठी साध्या पदमालेप्रमाणेच पदमालेतील सर्वात मोठे मूल्य (X_L) आणि सर्वात लहान मूल्य (X_S) माहित करून घ्यावे लागते व त्यानंतर सूत्राचा वापर करून विस्तार व विस्तार गुणांक काढला जातो.

उदाहरण : पुढील तक्त्यात 30 विद्यार्थ्यांनी अर्थशास्त्र विषयात मिळविलेले गुण दिलेले आहेत. त्यावरून विस्तार व विस्तार गुणांक काढा.

गुण	40	50	60	70	80
विद्यार्थी संख्या	5	7	9	5	4

उत्तर : वरील तक्त्यावरून

$$X_L = 80, \quad X_S = 40$$

विस्तार $R = X_L - X_S$

$= 80 - 40$

$R = 40$

$$\text{विस्तार गुणांक} = \frac{X_L - X_S}{X_L + X_S}$$

$$= \frac{80 - 40}{80 + 40}$$

$$= \frac{40}{120}$$

विस्तार गुणांक $= 0.33$.

३) संतत पदमालेतील विस्तार

संतत पदमालेत विस्तार व विस्तार गुणांक काढण्यासाठी सर्वप्रथम सर्वात छोट्या गटातील न्यूनत्तम मर्यादा आणि सर्वात मोठ्या गटातील महत्तम मर्यादा माहिती करून घ्यावी लागते व त्या आधारे आपल्याला X_S आणि X_L मिळते व त्यानंतर सूत्राचा वापर करून विस्तार व विस्तार गुणांक काढला जातो.

उदाहरण : खालील आकडेवारीत 40 पुरूषांच्या वयाचे गट दिलेले आहेत त्यावरून विस्तार व विस्तार गुणांक काढा.

वयोगट	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
पुरूषांची संख्या	7	6	12	8	7

उत्तर : वरील आकडेवारीवरून

$X_S = 10, \; X_L = 60$

विस्तार $R = X_L - X_S$

$= 60 - 10$

$R = 50$

$$\text{विस्तार गुणांक} = \frac{X_L - X_S}{X_L + X_S}$$

$$= \frac{60 - 10}{60 + 10}$$

$$= \frac{50}{70}$$

विस्तार गुणांक $= 0.71$.

विस्ताराचे गुण व दोष (Merits and Demerits of Range)

गुण :

विस्तार पद्धतीतील गुण पुढील प्रमाणे आहेत.

१. विस्तार हे परिमाण समजण्यास अत्यंत साधे व सोपे आहे.

२. शेअर बाजारातील किंमतीचा अभ्यास करताना हि पद्धती उपयोगी पडते, तसेच गुतवणूकदारांना शेअर्सच्या किंमतीतील विस्तारावरून गुंतवणूकी संदर्भात निर्णय घेण्यासाठी योग्य अंदाज बांधता येतो.

३. सर्वसामान्यपणे अभ्यास करण्यासाठी हि पद्धती अत्यंत उपयुक्त आहे. तसेच ही पद्धती समजून घेण्यासाठी अत्यंत कमी वेळ लागतो.

४. गुणवत्ता नियंत्रण आणि हवामानाचे अंदाज काढण्यासाठी विस्तार पद्धतीचा उपयोग केला जातो.

दोष :

विस्तार पद्धतीतील दोष पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. विस्ताराचे मूल्य पदमालेतील सर्व मूल्यांवर आधारित नसते.

२. वेगवेगळ्या नमुन्यात विस्ताराचे मूल्य बदलणारे असते.

३. विस्तारामुळे विभाजनाचे स्वरूप लक्षात येत नाही.

४. प्रारंभ किंवा शेवटची मूल्ये नसणाऱ्या पदमालेत विस्तार मापन करता येत नाही.

विचलनाच्या विस्तार या परिमाणामध्ये काही दोष असले तरी त्याचा उपयोग दैनंदिन व्यवहारात होत असतो. उदाहरणार्थ, विक्रेत्याला दिवस अखेर झालेल्या विक्रीतील फरक, तसेच शेअर बाजारातील किंमतीचा अभ्यास करताना विस्तार हे परिमाण उपयोगी ठरते. गुणवत्ता नियंत्रण विभागात उत्पादनाच्या गुणवत्तेच्या विस्ताराचा विचार केला जातो. उत्पादनातील कमीत कमी आणि जास्तीत जास्त उत्पादन लक्षात घेऊन नियंत्रण केले जाते.

१.५.२ चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

विचलनाच्या विस्तार या परिमाणात दिलेल्या पदमालेतील महत्तम आणि न्यूनत्तम मूल्यातील अंतर लक्षात घेतले जाते परंतु त्यापेक्षा कमी अंतराचा विचार त्यात होत नाही. विस्तार मधील हा महत्त्वाचा दोष कमी करण्यासाठी चतुर्थक विचलन उपयोगी पडते. चतुर्थक विचलनात पहिल्या $\frac{1}{4}$ घटकांना व शेवटच्या $\frac{1}{4}$ घटकांना वगळून इतर घटकांना वगळून इतर घटकांचा विचार केला जातो. अशा दोन चतुर्थकातील फरकाच्या सरासरीला चतुर्थक विचलन असे म्हणतात. चतुर्थक विचलन सूत्र स्वरूपात पुढील प्रमाणे लिहीता येईल.

चतुर्थक विचलन $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

Q.D. = चतुर्थक

Q_1 = प्रथम चतुर्थक

Q_3 = तृतीय चतुर्थक

थोडक्यात सांगावयाचे झाल्यास चतुर्थक विचलन म्हणजे तृतीय व प्रथम चतुर्थकातील फरकाची सरासरी होय.

पदमालेतील विभाजन हे जेव्हा समान किंवा प्रमाणबद्ध असते तेव्हा Q_3 व Q_1 मध्यगेपासून सारख्या अंतरावर असतात. त्यामुळे Q_1 आणि Q_3 पर्यंतच्या अंतरात एकूण अवलोकनापैकी 50% अवलोकनाचा समावेश होतो. याउलट जेव्हा विभाजन असमान असते किंवा प्रमाणबद्ध नसते तेव्हा मात्र Q_3 व Q_1 हे मध्यगेपासून सारख्या अंतरावर नसतात.

चतुर्थक विचलनाचे मूल्य जेवढे कमी असते तेवढा मध्यभागातील 50% घटकातील फरक हा कमी असतो. याउलट हे मूल्य जेवढे जास्त तेवढा फरक जास्त असतो. चतुर्थक विचलन हे निरपेक्ष विचलन असते व जेंव्हा त्याचा गुणांक काढला जातो तेंव्हा ते सापेक्ष विचलन असते. चतुर्थक विचलनापेक्षा त्याचा गुणांक हा तुलना करण्यासाठी अधिक उपयोगी ठरतो. चतुर्थक विचलनाचे सूत्र पुढीलप्रमाणे आहे.

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

चतुर्थक विचलनाचे मापन

१. साध्या किंवा व्यक्तीगत पदमालेतील चतुर्थक विचलन.

२. खंडित पदमालेतील चतुर्थक विचलन.

३. संतत पदमालेतील चतुर्थक विचलन.

२) साध्या पदमालेतील किंवा व्यक्तीगत पदमालेतील चतुर्थक विचलन

साध्या पदमालेत चतुर्थक विचलन काढण्यासाठी दिलेली आकडेवारी सर्वप्रथम चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडावी लागते. त्यानंतर Q_1 काढण्यासाठी $\left(\frac{N+1}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य व Q_3 काढण्यासाठी $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य विचारात घ्यावे लागते. Q_1 व Q_3 चे मूल्य काढल्यानंतर सूत्राच्या सहाय्याने चतुर्थक विचलन व चतुर्थक विचलन गुणांक काढावा लागतो.

उदाहरण : दिलेल्या माहितीच्या आधारे चतुर्थक विचलन व चतुर्थक विचलन गुणांक काढा.

11 19 31 13 21 16 41 45 36 40

उत्तर : सर्वप्रथम दिलेली पदमाला चढत्या क्रमाने मांडून घेऊ.

11 13 16 19 21 31 36 40 41 45

या ठिकाणी 10 घटक असल्यामुळे N = 10

पहिले चतुर्थक $Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

$= \left(\frac{10+1}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

$= \frac{11}{4}$ व्या घटकाचे मूल्य

$= 2.75$ व्या घटकाचे मूल्य

$Q_1 = 16$

तृतीय चतुर्थक $Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

$= 3\left(\frac{10+1}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

$= 3\left(\frac{11}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

$= \frac{33}{4}$ व्या घटकाचे मूल्य

= 8.25 व्या घटकाचे मूल्य

$Q_3 = 41$

चतुर्थक विचलन $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{41-16}{2}$$

$$= \frac{25}{2}$$

$$Q.D. = 12.5$$

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{41-16}{41+16}$$

$$= \frac{25}{27}$$

चतुर्थक विचलन गुणांक = 0.43.

२) खंडित पदमालेतील चतुर्थक विचलन

खंडित पदमालेत चतुर्थक विचलन व चतुर्थक विचलन गुणांक काढण्यासाठी सर्वप्रथम दिलेली पदमाला चढत्या क्रमाने मांडून त्याची संचित वारंवारीता काढली पाहिजे व त्यानंतर वरील सूत्राप्रमाणे Q_1 आणि Q_3 काढून चतुर्थक विचलन व चतुर्थक विचलन गुणांक काला पाहिजे.

उदाहरण : खालील दिलेल्या आकडेवारीवरून चतुर्थक विचलन व चतुर्थक विचलन गुणांक काढा.

गुण	30	70	40	20	10	60	50	80
विद्यार्थी संख्या	10	3	15	7	5	10	12	5

उत्तर :

गुण (*X*)	**विद्यार्थी संख्या (*f*)**	**संचित वारंवारीता (*cf*)**
10	5	5
20	7	12
30	10	22
40	15	37
50	12	49
60	10	59
70	3	62
80	5	67
	N = 67	

वरील तक्त्यावरून N = 67.

प्रथम चतुर्थक $Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

$= \left(\frac{67+1}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

$= \left(\frac{68}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

$=$ 17 व्या घटकाचे मूल्य

$Q_1 = 30$

तृतीय चतुर्थक $Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

$= 3\left(\frac{67+1}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

$= 3\left(\frac{68}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

$=$ 3 (17) व्या घटकाचे मूल्य

$=$ 51 व्या घटकाचे मूल्य

$Q_3 = 60$

चतुर्थक विचलन $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{60-30}{2}$$

$$= \frac{30}{2}$$

$Q.D. = 15$

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{60-30}{60+30}$$

$$= \frac{30}{90}$$

चतुर्थक विचलन गुणांक = 0.43.

३) संतत पदमालेतील चतुर्थक विचलन

संतत पदमालेत चतुर्थक विचलन आणि चतुर्थक विचलन गुणांक काढण्यासाठी सर्वप्रथम संचित वारंवारीता काढावी लागते व त्याननंतर प्रथम व तृतीय चतुर्थकाचे मूल्य काढावे लागते. त्यानंतर सूत्राच्या सहाय्याने चतुर्थक विचलन व चतुर्थक विचलन गुणांक काढावा लागतो.

प्रथम चतुर्थक :

संतत पदमालेत प्रथम चतुर्थक काढताना सर्वप्रथम प्रथम चतुर्थक गट माहित करावा लागतो व त्यानंतर सूत्राच्या सहाय्याने प्रथम चतुर्थक काढावे लागते.

Q_1 गट किंवा वर्ग = $\frac{N}{4}$ व्या घटकाचे मूल्य

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - C}{f} \times i$$

वरील सूत्रात, Q_1 = प्रथम चतुर्थक

L = चतुर्थक गट किंवा वर्गाची न्यूनत्तम मर्यादा

N = घटकांची संख्या किंवा वारंवारीता

C = चतुर्थक गटाच्या किंवा वर्गाच्या आगोदरच्या गटाची संचित वारंवारीता

f = चतुर्थक गटाची किंवा वर्गाची वारंवारीता

i = चतुर्थक गटाचे किंवा वर्गाचे वर्गांतर

तृतीय चतुर्थक :

संतत पदमालेत तृतीय चतुर्थक काढताना सर्वप्रथम तृतीय चतुर्थक गट माहित करावा लागतो व त्यानंतर सूत्राच्या सहाय्याने तृतीय चतुर्थक काढावे लागते.

Q_3 गट किंवा वर्ग = $\frac{3N}{4}$ व्या घटकाचे मूल्य

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - C}{f} \times i$$

वरील सूत्रात, Q_3 = तृतीय चतुर्थक

L = चतुर्थक गट किंवा वर्गाची न्यूनत्तम मर्यादा

N = घटकांची संख्या किंवा वारंवारीता

C = चतुर्थक गटाच्या किंवा वर्गाच्या आगोदरच्या गटाची संचित वारंवारीता

f = चतुर्थक गटाची किंवा वर्गाची वारंवारीता

i = चतुर्थक गटाचे किंवा वर्गाचे वर्गांतर

चतुर्थक विचलन $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

उदाहरण : खालील माहितीच्या आधारे चतुर्थक विचलन आणि चतुर्थक विचलन गुणांक काढा.

X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f	8	11	13	15	11	8	6

उत्तर :

X	*f*	*C f*
0-10	8	8
10-20	11	19
20-30	13	32
30-40	15	47
40-50	11	58
50-60	8	66
60-70	6	72
	N = 72	

वरील तक्त्यावरून N = 72

प्रथम चतुर्थक (Q_1)

Q_1गट किंवा वर्ग = $\frac{N}{4}$ व्या घटकाचे मूल्य

= $\frac{72}{4}$ व्या घटकाचे मूल्य

= 18 व्या घटकाचे मूल्य

Q_1 गट किंवा वर्ग = 10-20

L = 10, $\frac{N}{4}$ = 18, C = 8, f = 11, i = 10

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - C}{f} \times i$$

$$= 10 + \frac{18 - 8}{11} \times 10$$

$$= 10 + \frac{10}{11} \times 10$$

$$= 10 + \frac{100}{11}$$

= 10 + 9.09

Q_1 = 19.09

तृतीय चतुर्थक (Q_3)

Q_3 गट किंवा वर्ग = $\frac{3N}{4}$ व्या घटकाचे मूल्य

= $3\left(\frac{72}{4}\right)$ व्या घटकाचे मूल्य

= 3 (18) व्या घटकाचे मूल्य

= 54 व्या घटकाचे मूल्य

Q_1 गट किंवा वर्ग = 40-50

$L = 40, \quad \frac{3N}{4} = 54, \; C = 47, \; f = 11, \quad i = 10$

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - C}{f} \times i$$

$$= 40 + \frac{54 - 47}{11} \times 10$$

$$= 40 + \frac{7}{11} \times 10$$

$$= 40 + \frac{70}{11}$$

$= 40 + 6.36$

$Q_3 = 46.36$

चतुर्थक विचलन $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{46.36 - 19.09}{2}$$

$$= \frac{27.27}{2}$$

चतुर्थक विचलन = 13.63

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{46.36 - 19.09}{46.36 + 19.09}$$

$$= \frac{27.27}{65.45}$$

चतुर्थक विचलन गुणांक = 0.41.

चतुर्थक विचलनाचे गुण आणि दोष

गुण :

चतुर्थक विचलानचे गुण पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. चतुर्थक विचलन पद्धती ही विस्तार पद्धतीपेक्षा चांगली आहे.

२. शेवटच्या टोकाची मूल्ये नसलेल्या पदमालेत सुद्धा चतुर्थक विचलन काढता येते.

३. चतुर्थक विचलन फार मोठ्या व फार लहान संख्यांनी प्रभावीत होत नाही.

दोष :

चतुर्थक विचलनाचे दोष पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. चतुर्थक विचलनात फक्त ५०% घटकाचा विचार होतो म्हणजे ५०% घटक दुर्लक्षिली जातात.

२. चतुर्थक विचलनाची गणितीय पद्धतीने पडताळणी करता येत नाही.

३. चतुर्थक विचलन हे मूल्य नसून मूल्याची जागा दर्शविते.

१.५.३ माध्य विचलन (Mean Deviation)

विद्यार्थी मित्रांनो आपापर्यंत आपण विचलन मोजण्याच्या दोन पद्धतीचा अभ्यास केला. या दोन्ही विचलन पद्धतीतील महत्त्वाचा दोष म्हणजे या दोन्ही पद्धती सर्व मूल्यांवर आधारीत नसतात. हा दोष माध्य विचलनामध्ये दूर केला जाऊ शकतो कारण माध्य विचलन सर्व मूल्यांवर आधारीत असते. माध्य विचलन म्हणजे माध्यापासूनच्या चिन्हाकडे दुर्लक्ष करून विचलनाची काढलेली सरासरी होय. माध्य विचलन हे माध्य किंवा मध्यगापासून विचलन घेऊन काढता येते. सर्वसामान्यपणे माध्य विचलन हे माध्यापासूनच काढले जाते. चिन्हाचा विचार न करता मध्यगेपासून घेतलेल्या विचलनाची बेरीज माध्यापासून घेतलेल्या विचलनापेक्षा कमी असते म्हणून तात्वीकदृष्ट्या माध्यापासून विचलन घेतले जातात.

माध्य विचलन मापनाच्या पद्धती

१. साधी किंवा व्यक्तीगत पदमालेतील माध्य विचलन.

२. खंडित पदमालेतील माध्य विचलन.

३. संतत पदमालेतील माध्य विचलन.

१) साध्या किंवा व्यक्तीगत पदमालेतील माध्य विचलन

साध्या किंवा व्यक्तीगत पदमालेत माध्य विचलन काढण्यासाठी पुढील पायऱ्याने जावे लागते.

१. दिलेल्या पदमालेचा माध्य किंवा मध्यगा काढा.

२. आलेल्या माध्यापासून प्रत्येक घटकांचे चिन्हांचा विचार न करता विचलन घ्यावे व त्यास $|X-\overline{X}|$ ने दर्शवावे.

३. चिन्हांचा विचार न केलेल्या मूल्यांना दर्शविण्यासाठी दोन समांतर रेषा ओढावी जसे $|X-\overline{X}|$ या रेषांना Modulus असे म्हणतात.

४. त्यानंतर $|X-\overline{X}|$ ची बेरीज करावी म्हणजेच $\sum|X-\overline{X}|$ व व्या बेरजेला पदमालेतील एकुण घटक संख्येने भाग द्यावे.

५. माध्य विचलनासाठी δ (डेल्टा) किंवा M.D. हे चिन्ह वापरावे.

६. माध्य विचलन (δ किंवा M.D.) $= \dfrac{\sum|X-\overline{X}|}{N}$ या सूत्राचा उपयोग करावा.

७. माध्य विचलन गुणांक $= \dfrac{\text{M.D.}}{\overline{X}}$ किंवा $= \dfrac{\delta}{\overline{X}}$ या सूत्राचा उपयोग करावा.

उदाहरण : खालील दिलेल्या सात सदस्याच्या उत्पन्नाच्या माहितीवरून माध्य विचलन व माध्य विचलन गुणांक काढा.

3000 4000 4200 4400 4600 4800 58000

उत्तर :

X	$\|X-\overline{X}\|$
3000	1400
4000	400
4200	200
4400	0
4600	200
4800	400
5800	1400
$\sum X$ = 30800	$\sum\|X-\overline{X}\|$ = 4000

माध्य

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{30800}{7} = 4400$$

$$\overline{X} = 4400$$

माध्य विचलन

$$\text{M.D. किंवा } \delta = \frac{\sum |X - \overline{X}|}{N}$$

$$= \frac{4000}{7}$$

M.D. किंवा δ = 571.42.

माध्य विचलन गुणांक

$$\text{माध्य विचलन गुणांक } = \frac{\text{M.D.}}{\overline{X}} = \frac{\delta}{\overline{X}}$$

$$= \frac{571.43}{4400}$$

माध्य विचलन गुणांक = 0.13.

२) खंडित पदमालेतील माध्य विचलन

खंडित पदमालेत माध्य विचलन काढण्यासाठी पुढील पायऱ्याने जावे लागते.

१. दिलेल्या पदमालेचा माध्य किंवा मध्यगा काढा.

२. आलेल्या माध्यापासून प्रत्येक घटकांचे चिन्हाचा विचार न करता विचलन घ्यावे व त्यास $|X - \overline{X}|$ या शिर्षकाखाली दर्शवावे.

३. $|X - \overline{X}|$ च्या प्रत्येक मूल्याला संबंधित वारंवारितेने गुणाकार करून $f|X - \overline{X}|$ माहित करावे आणि त्याची बेरीज करावी $\sum f|X - \overline{X}|$.

४. $\sum f|X-\overline{X}|$ ला एकूण घटकांच्या किंवा निरिक्षणाच्या संख्येने भाग द्या आणि माध्य विचलन काढा.

माध्य विचलन, M.D. किंवा $\delta = \dfrac{\sum f|X-\overline{X}|}{N}$

५. माध्य विचलनाच्या मूल्यास माध्याने भागून माध्य विचलन गुणांक काढावा.

माध्य विचलन गुणांक $= \dfrac{\text{M.D.}}{\overline{X}} = \dfrac{\delta}{\overline{X}}$

उदाहरण : खालील माहितीच्या आधारे माध्य विचलन आणि माध्य विचलन गुणांक काढा.

X	10	11	12	13	14
f	3	12	18	12	3

उत्तर :

X	f	fX	$\lvert X-\overline{X}\rvert$	$f\lvert X-\overline{X}\rvert$
10	3	30	2	6
11	12	132	1	12
12	18	216	0	0
13	12	156	1	12
14	3	42	2	6
	N = 48	$\sum fx$ = 576		$\sum f\lvert X-\overline{X}\rvert$ = 36

$$\overline{X} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{576}{48} = 12$$

माध्य विचलन

M.D. किंवा $\delta = \dfrac{\sum f|X-\overline{X}|}{N} = \dfrac{36}{48}$

M.D. किंवा $\delta = 0.75$.

माध्य विचलन गुणांक $= \frac{M.D.}{\overline{X}} = \frac{\delta}{\overline{X}}$

$= \frac{0.75}{12}$

माध्य विचलन गुणांक = 0.0625.

३) संतत पदमालेतील माध्य विचलन.

संतत पदमालेत माध्य विचलन काढण्यासाठी पुढील पायऱ्याने जावे लागते.

१. दिलेल्या पदमालेचे माध्य किंवा मध्यगा काढा ($\overline{X}$ किंवा M).

२. आलेल्या माध्यापासून वर्गमध्याच्या प्रत्येक घटकांचे चिन्हाचा विचार न करता विचलन घ्या व त्यास $|M-\overline{X}|$ या शीर्षकाखाली दर्शवावे.

३. $|M-\overline{X}|$ च्या प्रत्येक मूल्याला संबंधित वारंवारितेने गुणाकार करून $f|M-\overline{X}|$ माहित करा आणि त्याची बैरीज करून $\sum f|M-\overline{X}|$ मिळवा.

४. $\sum f|M-\overline{X}|$ ला एकूण घटकांच्या किंवा निरिक्षणाच्या संख्येने भाग द्यावे आणि माध्य विचलन काढा.

माध्य विचलन M.D. किंवा $\delta = \frac{\sum f|M-\overline{X}|}{N}$

५. माध्य विचलनाच्या मूल्यास माध्याने भागून माध्य विचलन गुणांक काढा.

माध्य विचलन गुणांक $= \frac{M.D.}{\overline{X}} = \frac{\delta}{\overline{X}}$.

उदाहरण : खालील माहितीच्या आधारे माध्य विचलन आणि माध्य विचलन गुणांक काढा.

आकार	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
वारंवारिता	5	8	12	15	20	14	12	6

उत्तर :

X	f	M	dM	fdM	$\lvert M-\overline{X}\rvert$	$f\lvert M-\overline{X}\rvert$
0-10	5	5	– 30	– 150	– 38.15	190.75
10-20	8	15	– 20	– 160	– 28.15	225.20
20-30	12	25	– 10	– 120	– 18.15	217.80
30-40	15	35	0	0	– 8.15	122.25
40-50	20	45	10	200	1.85	37.00
50-60	14	55	20	280	11.85	165.90
60-70	12	65	30	360	21.85	262.20
70-80	6	75	40	240	31.85	191.10
	N = 92			750		1412.2

माध्य

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fdM}{N}$$

$$= 35 + \frac{750}{92}$$

$$= 35 + 8.15$$

$$\overline{X} = 43.15$$

माध्य विचलन

M.D. किंवा $\delta = \dfrac{\sum f\lvert M-\overline{X}\rvert}{N}$

$$= \frac{1412.2}{92}$$

M.D. किंवा δ = 15.35

माध्य विचलन गुणांक

$$\text{माध्य विचलन गुणांक} = \frac{\text{M.D.}}{\overline{\text{X}}} = \frac{\delta}{\overline{\text{X}}}$$

$$= \frac{15.35}{43.15}$$

माध्य विचलन गुणांक = 0.36.

माध्य विचलनाचे गुण आणि दोष (Merits and Demerits of Mean Deviation)

गुण :

माध्य विचलनाचे गुण पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. माध्य विचलन माहित करण्यासाठी सोपे असते तसेच समजण्यासाठीही सोपे असते. माध्य किंवा मध्यगा माहित झाले असता माध्य विचलन सहज माहित करता येते.

२. माध्य विचलन हे अवलोकनाच्या प्रत्येक घटकावर अवलंबून असते. जर अवलोकनातील किंवा सामग्रीतील कोणत्याही मूल्यात बदल झाला असता त्याचा परिणाम माध्य विचलनाच्या मूल्यावर होतो.

३. माध्य विचलन हे प्रमाण विचलनापेक्षा लहान व मोठा किंवा टोकाच्या मूल्याने कमी प्रभावीत होते.

४. माध्य विचलनात घेण्यात येणारी विचलने मध्य बिंदूपासून असल्यामुळे वेगवेगळ्या विभाजनात त्याची तुलना करता येते.

दोष :

माध्य विचलनातील दोष पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. माध्य विचलन काढताना चिन्हाकडे जाणीवपूर्वक दुर्लक्ष केले जाते पण हे गणितीय नियमाला धरून नाही.

२. माध्य विचलनाचे उत्तर निश्चित नसते तर माध्य विचलन माध्यापासून न काढता मध्यगेपासून विचलन काढले तर उत्तर भिन्न येते, तसेच माध्य विचलन हे बहुलकापासून काढले जात नाही.

माध्य विचलनात वरील दोष असले तरी ते समजण्यास आणि माहिती करून घेण्यास सोपे असल्यामुळे या परिमाणाचा अनेक ठिकाणी उपयोग होतो.

१.५.३ प्रमाण विचलन (Standard Deviation)

विचलनाच्या मापनातील दोष दूर करण्यासाठी १८९३ मध्ये कार्ल पिअरसन यांनी प्रमाण विचलन पद्धती मांडली. प्रमाण विचलनासाठी ग्रीक अक्षर सिग्मा (σ) या चिन्हाचा वापर केला जातो. प्रमाण विचलन हे विचलनाचे मोजमापन करण्याची एक दर्जेदार पद्धती आहे. सांख्यिकीय गणना आणि शोध कार्याकरीता प्रमाण विचलन आणि प्रमाण विचलन गुणांक हे एक सर्वश्रेष्ठ आणि शुद्ध मापक आहे. माध्य विचलनात जसे धन आणि ऋण चिन्हाकडे दुर्लक्ष केले जाते. त्याप्रकारे प्रमाण विचलनात चिन्हाकडे दुर्लक्ष केले जात नाही. तसेच प्रमाण विचलनाचे मूल्य सर्व घटकांवर अवलंबून असते.

प्रमाण विचलन म्हणजे पदमालेतील गणितीय माध्यापासून काढलेल्या विचलनाच्या वर्गाची बेरीज करून त्यास एकूण घटकांच्या किंवा निरिक्षणाच्या संख्येने भागून येणाऱ्या गुणोत्तराचे वर्गमुळ होय. पदमालेतील प्रत्येक घटकाच्या निरिक्षणावर प्रमाण विचलन आधारीत असते. प्रमाण विचलनाचे मूल्य जेवढे जास्त तेवढा पदमालेतील घटकांचा एकजिनसीपणा कमी असतो. याउलट जेव्हा प्रमाण विचलनाचे मूल्य जेवढे कमी तेवढा पदमालेतील घटकांचा एकजिनसीपणा जास्त असतो.

प्रमाण विचलनाच्या मापनासाठी पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

S.D. किंवा $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(X - \overline{X})^2}{N}}$

सूत्रामध्ये, σ = प्रमाण विचलन

$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$ = दिलेल्या मूल्याचे गणितीय माध्य

N = घटकांची संख्या

प्रमाण विचलनाची वैशिष्ट्ये :

१. प्रमाण विचलन हे विचलनाचे सर्वश्रेष्ठ मापक आहे.

२. प्रमाण विचलन हे पदमालेतील सर्व घटकांनी ब्रभावीत होते.

३. गणितीय वैशिष्ट्यामुळे प्रमाण विचलन आधुनिक किंवा प्रगत अभ्यासासाठी उपयुक्त ठरते.

प्रमाण विचलन मापनाच्या पद्धती :

१. साधी किंवा व्यक्तीगत पदमालेतील प्रमाण विचलन.

२. खंडित पदमालेतील प्रमाण विचलन.

३. संतत पदमालेतील प्रमाण विचलन.

१) साध्या पदमालेतील प्रमाण विचलन

साध्या पदमालेत प्रमाण विचलन काढण्यासाठी पुढील सूत्रांचा वापर केला जातो.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dX^2}{N} - \left(\frac{\sum dX}{N}\right)^2}$$

या सूत्रात, σ = प्रमाण विचलन

$\sum dX$ = गृहीत माध्यापासून विचलनाची बेरीज

$\sum dX^2$ = गृहीत माध्यापासून विचलनाच्या वर्गाची बेरीज

$N = \sum f$ = अवलोकनांची संख्या किंवा वारंवारीतेची बेरीज

या सूत्रात गृहीत माध्याची निवड करताना अवलोकनातील लहानात लहान मूल्य आणि मोठ्यात मोठे मूल्य यांच्या बेरजेला दोनने भाग दिल्यास जे मूल्य येते ते किंवा त्याच्या जवळपासची पूर्ण संख्या गृहीत माध्य म्हणून घ्यावे.

कृती :

१. सर्वप्रथम गृहीत माध्य निवडावे.

२. चिन्हांचा विचार करून अवलोकनाचे किंवा निरिक्षणांचे गृहीत माध्यापासून विचलन घेऊन dX काढावे व त्याची बेरीज करून $\sum dX$ काढावे.

३. N म्हणजे सर्व अवलोकनांची संख्या म्हणून विचारात घ्यावे.

४. dX चा वर्ग (dX * dX) करून त्याची बेरीज करावी व $\sum dX^2$ काढावे.

५. या सर्व किंमती प्रमाण विचलनाच्या सूत्रात ठेवून त्याचे मूल्य काढावे.

उदाहरण : पुढे 10 व्यक्तीची रक्तातील कोलेस्ट्राल पातळी आहे त्याआधारे प्रमाण विचलन व प्रमाण विचलन गुणांक काढा.

240, 260, 290, 245, 255, 288, 272, 263, 277, 251

उत्तर : सर्व प्रथम आपण गृहीत माध्य A = 264 घेऊ.

X	***dX = X – 264***	***dX^2***
240	– 24	576
260	– 04	16
290	26	676
245	– 19	361
255	– 09	81
288	24	576
272	08	64
263	– 01	01
277	13	169
251	– 13	169
	$\sum dX = 1$	$\sum dX^2 = 2689$

वरील तक्त्यावरून $\sum dX = 1$, $\sum dX^2 = 2689$, N = 10

माध्य $\overline{X} = A + \frac{\sum dX}{N} = 264 + \frac{1}{10} = 264 + 0.1 = 264.1$

प्रमाण विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum dX^2}{N} - \left(\frac{\sum dX}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{2689}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{268.9 - (0.1)^2}$$

$$= \sqrt{268.9 - 0.01}$$

$$= \sqrt{268.89}$$

$$\sigma = 16.39$$

$\therefore$ प्रमाण विचलन $\sigma = 16.39$ आहे.

प्रमाण विचलन गुणांक

$$\text{प्रमाण विचलन गुणांक} = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

$$= \frac{16.39}{264.1}$$

$\therefore$ प्रमाण विचलन गुणांक = 0.06.

२) खंडित पदमालेतील प्रमाण विचलन

खंडित पदमालेत प्रमाण विचलन काढण्यासाठी पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdX^2}{N} - \left(\frac{\sum fdX}{N}\right)^2}$$

कृती :

१. सर्वप्रथम गृहीत माध्य निवडावे.

२. चिन्हांचा विचार करून अफलोकनांचे गृहीत माध्यापासून विचलन घेऊन dX काढावे व त्याची बेरीज करून $\sum dX$ काढावे.

३. dX च्या प्रत्येक मूल्याला संबंधित वारंवारितेने गुणाकार करून fdX काढावे व त्याची बेरीज करावी त्यापासून $\sum fdX$ काढावे.

४. fdX च्या प्रत्येक मूल्याला संबंधित dX ने गुणाकार करून fdX^2 काढावे व त्याची बेरीज करावी त्यापासून $\sum fdX^2$ काढावे.

५. $N = \sum f$ म्हणजेच वारंवारितेची बेरीज करावी.

६. या सर्व किंमती प्रमाण विचलनाच्या सूत्रात ठेवून सोडवावे.

उदाहरण : एका कंपनीतील कामगारांच्या समुहाचे वेतन पुढील तक्त्यात दिलेले आहे, त्याआधारे वेतनाचे प्रमाण विचलन व प्रमाण विचलन गुणांक काढा.

वेतन हजार रू.	45	50	55	60	65	70	75	80
व्यक्तीची संख्या	3	5	8	7	9	7	4	7

उत्तर : गृहीत माध्य A = 60 घेऊन.

वेतन (X)	**व्यक्तीची संख्या (*f*)**	***dX***	***fdX***	***fdX²***
45	3	– 15	– 45	675
50	5	– 10	– 50	500
55	8	– 5	– 40	200
60	7	0	0	0
65	9	5	45	235
70	7	10	70	700
75	4	15	60	900
80	7	20	140	2800
	N = 50		$\sum fdX$ = 180	$\sum fdX^2$ = 6010

वरील तक्त्यावरून N = 50, $\sum fdX$ = 180, $\sum fdX^2$ = 6010, A = 60

माध्य $\overline{X} = A + \frac{\sum fdX}{N}$

$= 60 + \frac{180}{50}$

= 60 + 3.6

$\overline{X}$ = 63.6

माध्य $\overline{X}$ = 63.6.

प्रमाण विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdX^2}{N} - \left(\frac{\sum fdX}{N}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{6010}{50} - \left(\frac{180}{50}\right)^2}$

$= \sqrt{120.2 - (3.6)^2}$

$= \sqrt{120.2 - 12.96}$

$= \sqrt{107.24}$

$\sigma = 10.35$

प्रमाण विचलन गुणांक

प्रमाण विचलन गुणांक $= \frac{\sigma}{\overline{X}}$

$= \frac{10.35}{63.6}$

प्रमाण विचलन गुणांक = 0.16.

३) संतत पदमालेतील प्रमाण विचलन

संतत पदमालेत प्रमाण विचलन काढण्यासाठी पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd\text{M}^2}{\text{N}} - \left(\frac{\sum fd\text{M}}{\text{N}}\right)^2}$$

कृती :

१. सर्वप्रथम पदमालेतील वर्गांचे किंवा गटांचे वर्गमध्य किंवा मध्यबिंदू काढावा.

२. त्यानंतर वर्गमध्यामधून गृहीत माध्य निवडावे व सर्व मध्यबिंदूचे त्यापासून विचलन घेऊन d M काढावे.

३. d M च्या प्रत्येक मूल्याला संबंधित वारंवारितेने गुणाकार करून fd M काढावे व त्याची बेरीज करून $\sum fd\text{M}$ काढावे.

४. fdM ला संबंधित d M ने गुणाकार करून $fd\,\text{M}^2$ काढावे व त्याची बेरीज करून $\sum fd\text{M}^2$ काढावे.

५. वारंवारितेची बेरीज करून N काढावे.

६. सर्व मूल्य किंवा किंमती सूत्रात ठेवून सोडवावे.

उदाहरण : पुढील वारंवारिता वितरणाच्या सहाय्याने प्रमाण विचलन व प्रमाण विचलन गुणांक काढा.

गुण	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
विद्यार्थी संख्या	5	12	30	45	50	37	21

उत्तर : गृहीत माध्य 35 घेऊन.

गुण (X)	विद्यार्थी संख्या (f)	M	dM	fdM	fdM^2
0-10	5	5	– 30	– 150	4500
10-20	12	15	– 20	– 240	4800
20-30	30	25	– 10	– 300	3000
30-40	45	35	0	0	0
40-50	50	45	10	500	5000
50-60	37	55	20	740	14800
60-70	21	65	30	630	18900
	N = 200			$\sum fd$M = 1180	51000

वरील तक्त्यावरून A = 35, N = 200, $\sum fd$M = 180, $\sum fd$M^2 = 51000.

माध्य $\overline{X} = A + \frac{\sum fdM}{N}$

$$= 35 + \frac{1180}{200}$$

$$= 35 + 5.9$$

$$\overline{X} = 40.9$$

प्रमाण विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdM^2}{N} - \left(\frac{\sum fdM}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{51000}{200} - \left(\frac{1180}{200}\right)^2}$$

$$= \sqrt{255 - (5.9)^2}$$

$$= \sqrt{255 - 34.81}$$

$$= \sqrt{220.19}$$

$$\sigma = 14.83$$

प्रमाण विचलन गुणांक

$$\text{प्रमाण विचलन गुणांक} = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

$$= \frac{14.83}{40.9}$$

प्रमाण विचलन गुणांक = 0.36.

प्रमाण विचलनाचे गुण आणि दोष (Merits and Demerits of Standard Deviation)

गुण :

प्रमाण विचलनाचे गुण पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. प्रमाण विचलन हे सर्व घटकांवर किंवा अवलोकनांवर अवलंबुन असते.

२. प्रमाण विचलनावर प्रगत गणितीय प्रक्रीया करता येतात.

३. प्रमाण विचलनावर मोठ्या व लहान संख्याचा कमी परिणाम होतो.

४. प्रमाण विचलन ही विचलन मोजण्याची आदर्श पद्धती आहे.

५. प्रमाण विचलनाच्या सहाय्याने दोन किंवा दोन पेक्षा अधिक वितरणाची तुलना करता येते.

६. प्रमाण विचलनाचा उपयोग अनेक सांख्यिकीय प्रक्रीयासाठी केला जातो.

दोष :

प्रमाण विचलनाचे दोष पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. विचलनाचे मापन करण्याच्या विविध पद्धतीपैकी हि पद्धती अधिक गुंतागुंतीची आहे.

२. प्रमाण विचलन काढताना विचलनाचा वर्ग काढावा लागतो व त्यामुळे मोठ्या संख्या येतात व गुंतागुंत वाढते.

विचरण गुणांक (Coefficient of Variation)

प्रमाण विचलन हे विचलनाचे निरपेक्ष मापक आहे. प्रमाण विचलनासी संबंधित विचलनाचा सापेक्ष मापक म्हणजे विचरण गुणांक होय. हे मापक कार्ल पिअरसन यांनी विकसित केले आणि ते मापक सापेक्ष विचरण मोजण्यासाठी सामान्यपणे वापरले जाते. विचरण गुणांकाचा वापर हा जेव्हा आपण दोन किंवा दोन पेक्षा अधिक पदमालांच्या विचरणाची तुलना करण्यासाठी केली जाते. ज्या पदमालेचा विचरण गुणांक जास्त आहे ती पदमाला अधिक बदलती आहे किंवा कमी सुसंगत, कमी एकसमान, कमी किंवा कमी एक जिनसी असते. दुसऱ्या बाजूने ज्या पदमालेचा विचरण गुणांक कमी आहे ती पदमाला कमी बदलती किंवा अधिक सुसंगत, अधिक एकसमान, अधिक स्थिर किंवा अधिक एकजिनसी असते. विचरण गुणांक C.V. या अक्षराने दर्शविला जातो. विचरण गुणांक प्रमाण विचलन गुणांकाला 100 ने गुणून काढता येतो. विचरण गुणांकाचे सूत्र पुढीलप्रमाणे आहे.

C. V. = प्रमाण विचलन गुणांक $\times 100$

$$C.V. = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$$

C. V. = विचरण गुणांक

σ = प्रमाण विचलन

$\overline{X}$ = माध्य

उदाहरण : पुढील तक्त्यात विद्यापीठातील 80 विद्यार्थ्यांचा सकाळच्या नाश्त्यावरील मासिक खर्च आहे.

खर्च (रू)	विद्यार्थी संख्या	खर्च (रू)	विद्यार्थी संख्या
780-820	2	580-620	13
740-780	6	540-580	9
700-740	7	500-540	7
660-700	12	460-500	4
620-660	18	420-460	2

यावरून प्रमाण विचलन व विचरण गुणांक काढा.

उत्तर : समजा खर्च म्हणजे x व वारंवारिता म्हणजे f. गृहीत माध्य A = 620 घेऊन

X	*f*	**M**	***d*M**	***fd*M**	***fd*M^2**
780-820	2	800	180	360	64800
740-780	6	760	140	840	117600
700-740	7	720	100	700	70000
660-700	12	680	60	720	4320
620-660	18	640	20	360	7200
580-620	13	600	– 20	– 260	5200
540-580	9	560	– 60	– 540	32400
500-540	7	520	– 100	– 700	70000
460-500	4	480	– 140	– 560	78400
420-460	2	440	– 180	– 360	64800
	N = 80			560	553600

वरील तक्त्यावरून A = 620, N = 80, $\sum fd\text{M} = 560$, $\sum fd\text{M}^2 = 553600$.

माध्य $\overline{\text{X}} = \text{A} + \frac{\sum fd\text{M}}{\text{N}}$

$$= 620 + \frac{560}{80}$$

$$= 620 + 7$$

$$\overline{\text{X}} = 627$$

प्रमाण विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd\text{M}^2}{\text{N}} - \left(\frac{\sum fd\text{M}}{\text{N}}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{553600}{80} - \left(\frac{560}{80}\right)^2}$$

$$= \sqrt{6920 - (7)^2}$$

$$= \sqrt{6920 - 49}$$

$$= \sqrt{6871}$$

$$\sigma = 82.89$$

प्रचरण गुणांक $C.V. = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$

$$= \frac{82.89}{627} \times 100$$

C.V. = 13.22.

आपली प्रगती तपासा - ३

दिलेल्या पर्यायातून योग्य पर्याय निवडा.

१. विस्तार हे ...... विचलन आहे.

(अ) सापेक्ष (ब) निरपेक्ष

(क) प्रमाण (ड) यापैकी नाही

२. माध्य विचलन गुणांक हे .... विचलन आहे.

(अ) सापेक्ष (ब) निरपेक्ष

(क) प्रमाण (ड) यापैकी नाही

३. .... हे विचलनाचे आदर्श परिमाण आहे.

(अ) विस्तार (ब) चतुर्थक विचलन

(क) माध्य विचलन (ड) प्रमाण विचलन

४. प्रमाण विचलन हे .... घटकांनी प्रभावीत होते.

(अ) सर्व (ब) टोकाच्या

(क) मध्यभागी असलेल्या (ड) यापैकी नाही

५. विचलनाचे .... हे परिमाण पदमालेतील सर्व घटकावर आधारीत असते.

(अ) विस्तार (ब) चतुर्थक विचलन

(क) प्रमाण विचलन (ड) वरील सर्व

आपली प्रगती तपासा - ४

एक किंवा दोन वाक्यात उत्तरे द्या.

१. विचलनाच्या परिमाणापैकी सर्वात ढोबळ मापक कोणते आहे ?

२. विचलनाचे आदर्श परिमाण कोणते ?

३. चतुर्थक विचलनाचे सूत्र सांगा.

४. वर्गांतर म्हणजे काय ?

५. माध्यापासून विचलन घेऊन काढलेले विचलनाचे परिमाण कोणते ?

१.६ सारांश

प्रस्तुत घटकामध्ये आपण केंद्रीय प्रवृत्ती म्हणजे काय ते अभ्यासले केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणाच्या सहाय्याने आपणास संपूर्ण माहिती किंवा आकडेवारीचे प्रतिनिधीत्व करणारी एखादी संख्या शोधणे शक्य होते. संशोधन प्रक्रीयेमध्ये अर्थव्यवस्थेच्या विविध क्षेत्रातील समस्यांची किंवा घटकांची माहिती किंवा आकडेवारी उपलब्ध झाल्यानंतर त्यावर उपाययोजना सुचविण्यासाठी नियोजन करण्यासाठी केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणांचा उपयोग होतो. उदा. कृषी किंवा उद्योग क्षेत्रातील सरासरी उत्पादकता, सरासरी उत्पन्न, विशिष्ठ उत्पादनाचा सरासरी खर्च इ. समस्याचा किंवा घटकांचा अभ्यास केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणाच्या सहाय्याने करता येतो. सरासरी हा शब्द आपण आपल्या दैनंदिन जीवनात किंवा व्यवहारात अनेकवेळा सहजपणे वापरतो. परंतु सरासरी हे परिमाण पदमालेचे किंवा विभाजनाचे पुरेसे वर्णन करत नाही. त्यासाठी विचलनाच्या मदतीने दिलेल्या मूल्यात आणि सरासरीत

कोणत्या कारणाने आंतर किंवा फरक निर्माण झाला आहे ते सांगू शकतो. त्याचबरोबर आर्थिक सामाजिक समस्यांचे विश्लेषण आणि तुलनात्मक अभ्यास करण्यासाठी विचलनाच्या निरपेक्ष आणि सापेक्ष परिमाणांचा उपयोग होतो.

१.७ पारिभाषीक शब्द

१.	सरासरी	:	अनेक संख्यांचे प्रतिनिधीत्व करणाऱ्या एका संख्येस सरासरी असे म्हणतात.
२.	गणितीय माध्य	:	सर्व घटकांच्या मूल्यांच्या बेरजेला घटकांच्या संख्येने भागल्यास येणाऱ्या संख्येस गणितीय माध्य असे म्हणतात.
३.	मध्यगा	:	दिलेल्या मूल्यातील मध्यवर्ती मूल्य म्हणजे मध्यगा होय.
४.	बहुलक/भूईष्टक	:	दिलेल्या माहितीत सर्वात जास्त पुनरावृत्ती झालेल्या घटकाच्या मूल्यास बहुलक असे म्हणतात.
५.	भौमितीक माध्य	:	भौमितीक माध्य म्हणजे एकुण अवलोकनाच्या संख्येएवढा त्या संख्याच्या गुणाकाराचा मूळ होय.
६.	विचलन	:	पदमालेतील भिन्नता किंवा फरकाचे परिमाण मोजण्याचे तंत्र होय.
७.	निरपेक्ष विचलन	:	निरपेक्ष विचलन म्हणजे ज्यात भिन्न पदमालेतील एकक सारखे असते व त्या पदमालातील भिन्नता मोजता येते.
८.	सापेक्ष विचलन	:	सापेक्ष विचलन म्हणजे ज्यात भिन्न पदमालेतील एकक भिन्न असते तेव्हा दोन पदमालांची तुलना करता येते.
९.	विस्तार	:	सर्वात लहान व सर्वात मोठ्या मूल्यातील फरक.
१०.	चतुर्थक विचलन	:	मध्यभागातील दोन चतुर्थकातील फरकाची सरासरी होय.
११.	माध्य विचलन	:	माध्यापासून घेतलेल्या विचलनाची सरासरी होय.

१.८ आपली प्रगती तपासा उत्तरे

आपली प्रगती तपासा - १

१) (अ) आणि (ब) दोन्ही

२) तीन

३) दोन

४) बहुलक

५) भौमितीक माध्य

आपली प्रगती तपासा - २

१) संपूर्ण आकडेवारी किंवा मूल्यांचे प्रतिनिधीत्व करू शकेल असे मूल्य किंवा संख्या म्हणजे केंद्रीय प्रवृत्ती होय.

२) गणितीय माध्य म्हणजे सर्व घटकांच्या मूल्यांच्या बेरजेला घटकांच्या संख्येने भागल्या नंतर येणारे मूल्य होय.

३) मध्यगा म्हणजे दिलेल्या मूल्यातील मध्यवर्ती मूल्य होय.

४) बहुलक म्हणजे दिलेल्या माहितीत किंवा आकडेवारीत सर्वात जास्त पुनरावृत्ती झालेल्या घटकाचे मूल्य होय.

५) वर्गमध्ये म्हणजे वर्गाच्या महत्तम मर्यादा आणि न्यूनत्तम मर्यादा यांच्या बेरजेस दोनने भागल्यास मिळणारे मूल्य होय.

आपली प्रगती तपासा - ३

१) निरपेक्ष

२) सापेक्ष

३) प्रमाण विचलन

४) सर्व

५) प्रमाण विचलन

आपली प्रगती तपासा - ४

१) विचलनाच्या परिमाणापेकी विस्तार हे सर्वात ढोबळ मापक आहे.

२) प्रमाण विचलन हे विचलनाचे आदर्श परिमाण आहे.

३) चतुर्थक विचलनाचे सूत्र $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ आहे.

४) वर्गांतर म्हणजे वर्गाची वरची व खालची मर्यादा यातील फरक होय.

५) माध्या पासून विचलन घेऊन काढलेले विचलनाचे परिमाण म्हणजे माध्य विचलन होय.

१.९ स्वाध्याय

१. खालील दिलेल्या माहितीच्या आधारे गणितीय माध्य काढा.

गुण	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
वारंवारिता	5	10	25	30	20	10

२. पुढील दिलेल्या माहितीच्या आधारे मध्यगा काढा.

गुण	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
विद्यार्थी संख्या	29	195	241	117	52	10	6	3

३. पुढील माहितीच्या आधारे माध्य, मध्यगा आणि बहुलक काढा.

मूल्ये	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
वारंवारिता	3	5	7	10	12	15	12	6	8	2

४. पुढील पुढील माहितीच्या आधारे भौमितीक माध्य व संवादी माध्य काढा.

वयोगट	35-40	40-45	45-50	50-55
व्यक्तींची संख्या	220	242	268	70

५. खालील दिलेल्या माहितीच्या आधारे चतुर्थक विचलन आणि चतुर्थक विचलन गुणांक काढा.

वेतन	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
कामगार	14	62	99	18	7

६. पुढील माहितीच्या आधारे माध्य विचलन आणि माध्य विचलन गुणांक काढा.

आकार	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
वारंवारिता	7	12	18	25	16	14	8

७. पुढील माहितीच्या आधारे प्रमाण विचलन व प्रमाण विचलन गुणांक काढा.

वय	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
व्यक्तीची संख्या	170	110	80	45	40	35

८. खालील दिलेल्या माहितीच्या आधारे विचरण गुणांक काढा.

वय	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
व्यक्तीची संख्या	15	15	23	22	25	10	5	10

९. टीपा लिहा.

१) केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे

२) गणितीय माध्य

३) मध्यगा

४) बहुलक

५) भौमितीक माध्य

६) संवादी माध्य

७) विस्तार

८) चतुर्थक विचलन

९) माध्य विचलन

१०) प्रमाण विचलन

१.१० संदर्भ

१. डॉ. वा. भा. पाटील(२००६), संशोधन पद्धती, प्रशांत पब्लिकेशन, जळगाव.

२. प्रा. राम देशमुख (२०११) मूलभूत सांख्यिकी, विद्या प्रकाशन, नागपूर.

३. डॉ. विश्वास कदम (२०१४), सांख्यिकीय पद्धती, कैलास पब्लिकेशन, औरंगाबाद.

४. डॉ. प्रदीप आगलावे (२०००) संशोधन पद्धती, विद्या प्रकाशन, नागपूर.

अधिक वाचनासाठी संदर्भ :

1. Gupta, S.P. (2014). Statistical Methods, Sultan Chand and Sons, New Delhi.

2. Elhance, Elhance, Agarwal (2015). Fundamentals of Statistics, Kabab Mahal, New Delhi.

❑ ❑ ❑

घटक २

असममिती, परिबल आणि वशिंडता

(Skewness, Moments and Kurtosis)

२.० उद्दिष्टे

२.१ प्रस्तावना

२.२ असममिती (Skewness)

२.२.१ असममिती - अर्थ आणि संकल्पना

२.२.२ असममिती चाचण्या

२.३ असममितीचे मापक

२.३.१ निरपेक्ष मापक आणि सापेक्ष मापक

२.३.२ कार्ल पिअरसनचा असममिती गुणांक

२.३.३ बाऊलेचा असममिती गुणांक

२.३.४ केलेचा अमसमिती गुणांक

२.४ परिबल (Moments)

२.४.१ परिबल - अर्थ आणि संकल्पना

२.४.२ परिबलाची उद्दिष्ट्ये

२.४.३ माध्यापासूनचे परिबल

२.४.४ गृहीत माध्यापासूनचे परिबल

२.५ वशिंडता (Kurtosis)

२.५.१ वशिंडता - अर्थ आणि संकल्पना

२.५.२ वशिंडतेचे मापक

२.६ सारांश

२.० उद्दिष्टे (Objectives)

विद्यार्थी मित्रहो या घटकाच्या अध्ययनानंतर आपणास -

- समिमितीची आणि असममितीची संकल्पना स्पष्ट होईल.
- असममितीच्या मापकाचे ज्ञान होईल.
- परिबलाची संकल्पना स्पष्ट होईल.
- वर्शिंडतेचा अर्थ समजून घेता येईल.
- वर्शिंडतेच्या मापकाचे ज्ञान होईल.

२.१ प्रस्तावना (Introduction)

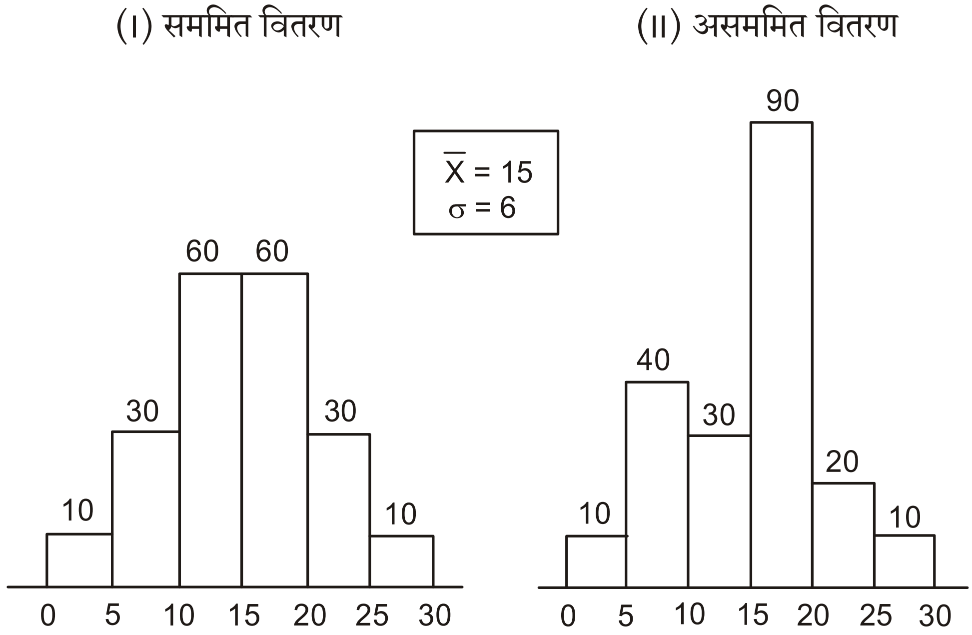
विद्यार्थी मित्रहो मागील घटकामध्ये आपण पाहिले की, केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणाच्या सहाय्याने आपणास समष्टीचे किंवा माहितीचे प्रातिनिधीक मूल्य प्राप्त होते. ते प्रातिनिधीक मूल्य संपूर्ण समष्टी किंवा माहितीचे प्रतिनिधीत्व करते. तसेच विचलनाच्या परिमाणाच्या सहाय्याने आपणास समष्टीतील अधिकांश मूल्ये ही केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणाच्या जवळ आहेत किंवा दुरवर आहेत हे माहित होते. हि सांख्यिकीय साधने म्हणजेच, केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे आणि विचलनाची परिमाणे यापासून आपण माहितीचे पुरेशे ध्वनीतार्थ काढू शकत नाही. याचाच अर्थ असा की, ही सांख्यिकीय साधने वापरून माहितीच्या बाबतीत आपण जे अन्वयार्थ काढतो ते पूर्ण नसतात. समष्टी किंवा माहितीची दुसरी बाब म्हणजे त्याची सममिती माहित करणे होय. माहितीचे आलेखाद्वारे प्रस्तुतीकरण केल्यानंतर आपणास असे दिसून येते की, वारंवारिता हि बहुलकासोबत सममित आहे किंवा नाही. हे 'सममिती' आणि 'असममिती'चे ज्ञान प्राप्त केल्यानंतर चांगल्या प्रकारे अभ्यासू शकतो. वारंवारिता वक्रा संदर्भातील आणखी एक दुसरी बाब म्हणजे आपणास वारंवारिता वक्र हा पसरट किंवा उंच आहे हे माहिती

असणे गरजेचे आहे. अशा प्रकारच्या पसरटपणा आणि उंचीला 'वशिंडता' असे म्हणतात. या घटकामध्ये आपण असममिती आणि त्याचे प्रकार, सममिती मापनाच्या चाचण्या, असममिती मापनाची परिमाणे त्याच बरोबर परिबल आणि वशिंडता या संकल्पनांचा अभ्यास करणार आहोत.

२.२ असममिती (Skewness)

२.२.१ असममिती - अर्थ व संकल्पना (Skewness - Meaning and Concept)

वितरणामध्ये असममिती आहे याचा अर्थ असा की, वितरणामध्ये सममिती नाही. अनेकवेळा आपणास असे आढळून येते की, दोन वितरणे ज्यांची माध्ये आणि प्रमाण विचलने सारखी आहेत. उदाहरण पहावयाचे झाल्यास आपणास पुढील आकृतीचे निरिक्षण करता येईल.



वरील दोन वितरणाचा अभ्यास केल्यानंतर आपणास असे लक्षात येते की, दोन्ही वितरणाचे माध्य आणि प्रमाण विचलनाचे मूल्य सारखे आहे. म्हणजेच माध्य ($\overline{X}$) 15 आणि प्रमाण विचलन (σ) 6 आहे. याचा अर्थ दोन्ही वितरणे समान आहेत असा नाही. डाव्या बाजूचे वितरण सममित आहे तर उजव्या बाजूचे वितरण असममित आहे. असममितीच्या परिमाणाच्या सहाय्याने आपणास विविध वितरणामधील फरक लक्षात येतो.

असममितीच्या व्याख्या :

असममितीच्या काही महत्त्वाच्या व्याख्या पुढील प्रमाणे आहेत.

क्रॉकसटन आणि काऊडन यांच्या मते,

''जेव्हा एखादी श्रेणी किंवा श्रृंखला सममित नसते तेव्हा ती असममित असते.''

मॉरीस ह्यूमबर्ग यांच्या मते,

''असममिती म्हणजे वारंवारिता वितरणाच्या आकारात सममितीचा अभाव होय.''

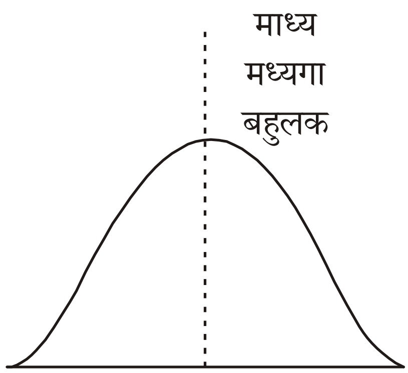
सिंपसन आणि काफका यांच्या मते,

''असममितीची परिमाणे आपणास असममितीची दिशा आणि व्याप्ती सांगतात. सममितीय वितरणामध्ये माध्य, मध्यगा आणि भूईष्ट्क किंवा बहुलक समान असतात. जेवढे आपण बहुलका पासून दूर जाऊ तेवढी अधिक असममिती आपणास मिळते.''

वरील व्याख्यावरून हे लक्षात येते की, असममिती म्हणजे सममितीचा आभाव होय, जेंव्हा वितरण हे सममितीय नसते किंवा असममितीय असते तेंव्हा त्यास असममितीय वितरण असे म्हणतात.

सममितीय आणि असममितीय वक्र

सममितीय वक्र



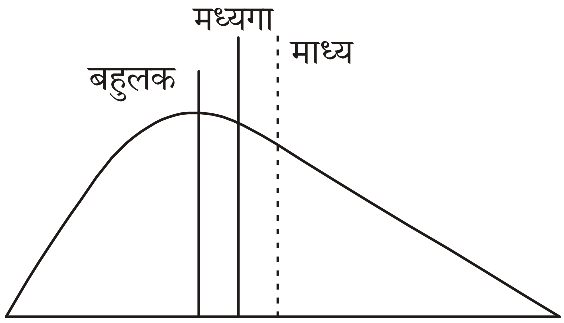
वरील वक्र हा आदर्श सममितीय वक्र आहे. जो मंदिरातील घंटेच्या आकाराचा असतो ज्यात असममिती नसते. या वक्रात माध्य, मध्यगा आणि बहुलक हे एकमेकांना तंतोतंत जुळतात.

म्हणजेच, माध्य = मध्यगा = बहुलक

असममितीय वक्र : असममितीय वक्र दोन प्रकारचे आहेत.

१) धनात्मक असममितीय वक्र, २) ऋणात्मक असममितीय वक्र

१) धनात्मक असममितीय वक्र

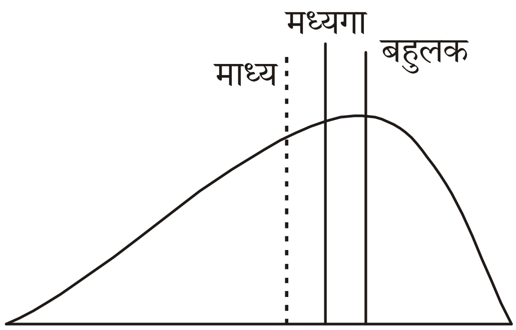


वरील वक्राचा आकार माफक प्रमाणात असममितीय आहे. हा वक्र उजव्या बाजूला असममितीय झालेला आहे. या वक्रामध्ये आपणास असे दिसते की, माध्याचे मूल्य मध्यगेच्या मूल्यापेक्षा जास्त आहे आणि मध्यगेचे मूल्य बहुलकापेक्षा जास्त आहे. म्हणजेच,

माध्य > मध्यगा > बहुलक

अशी प्रकारच्या असममितीय वक्रास धनात्मक असममितीय वक्र असे म्हणतात.

२) ऋणात्मक असममितीय वक्र



वरील वक्राचा आकार माफक प्रमाणात असममितीय आहे. हा वक्र डाव्या बाजूला असममितीय झालेला आहे. या वक्रात आपणास असे दिसते की, बहुलकाचे मूल्य हे मध्यगेच्या मूल्यापेक्षा जास्त आहे आणि मध्यगेचे मूल्य माध्याच्या मूल्यापेक्षा जास्त आहे. म्हणजेच,

माध्य < मध्यगा < बहुलक

अशा प्रकारच्या असममितीय वक्रास ऋणात्मक असममितीय वक्र असे म्हणतात.

२.२.२ असममितीच्या चाचण्या (Tests of Skewness)

वितरण हे सममितीय किंवा असममितीय आहे हे तपासण्यासाठीच्या काही चाचण्या आहेत त्या पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. माध्य, मध्यगा आणि बहुलकाची मूल्ये तंतोतंत जुळत नाहीत. यामध्ये असणारे अंतर जेवढे जास्त तेवढी असममिती अधिक असते.

२. चतुर्थके ही मध्यगेपासून समान अंतरावर नसतात, म्हणजे,

$$(Q_3 - Me) - (Me - Q_1) \neq 0$$

३. मध्यगेपासून घेतलेल्या धनात्मक विचलनाची बेरीज हि ऋणात्मक विचलनाच्या बेरजेबरोबर नसते.

४. बहुलकापासून समान विचलनाच्या बिंदूवर वारंवारितेचे वितरण हे समान प्रमाणात होत नाहीत.

५. जेव्हा माहिती आलेख पेपरवर मांडली जाते तेव्हा त्यापासून सामान्य घंटेच्या आकाराचा वक्र मिळत नाही.

वरील चाचण्यावरून आपणास असे दिसून येते की,

असममितीय वितरणामध्ये

माध्य = मध्यगा = बहुलक

धनात्मक असममितीय वितरणामध्ये

माध्य > मध्यगा > बहुलक

ऋणात्मक असममितीय वितरणामध्ये

माध्य < मध्यगा < बहुलक

२.३ असममितीचे मापक किंवा परिमाणे (Measures of Skewness)

असममितीची परिमाणे आपणास मालिकेतील किंवा श्रृंखलेतील असममितीची दिशा आणि व्याप्ती सांगतात आणि आधारे आपणास संबंधित असणाऱ्या दोन किंवा अधिक श्रृंखलांची तुलना करता येते. असममितीची परिमाणे निरपेक्ष आणि सापेक्ष असतात.

२.३.१ असममितीची निरपेक्ष परिमाणे (Absolute Measures of Skewness)

असममितीचे मापन निरपेश्रपद्धतीने माध्य आणि बहुलक यांच्यातील फरकाच्या सहाय्याने केले जाते.

सूत्ररूपाने, निरपेक्ष S_K = माध्य – बहुलक

निरपेक्ष $S_K = \overline{X} - Z$

येथे, S_K = असममिती

$\overline{X}$ = माध्य

Z = बहुलक

जर माध्याचे मूल्य बहुलकाच्या मूल्यापेक्षा जास्त असते तेव्हा असममिती ही धन असते, म्हणजेच वरील सुत्रामध्ये आपणास धन चिन्ह मिळते.

जर बहुलकाचे मूल्य माध्याच्या मूल्यापेक्षा जास्त असते तेव्हा असममिती ही ऋण असते, म्हणजे, वरील सुत्रामध्ये आपणास ऋण चिन्ह मिळते.

२.३.२ असममितीची सापेक्ष परिमाणे (Relative Measures of Skewness)

असममितीची चार प्रमुख सापेक्ष परिमाणे आहेत ती पुढील प्रमाणे आहेत.

१. कार्ल पिअरसनचा असममिती गुणांक.

२. बाऊलेचा असममिती गुणांक.

३. केलेचा असममिती गुणांक.

४. परिबलावर आधारीत असममिती परिमाणे.

असममितीच्या या परिमाणांचा वापर मुख्यत: दोन किंवा अधिक वितरणांची तुलना करण्यासाठी केला जातो.

असममितीच्या चांगल्या परिमाणात पुढील तीन गुणधर्म असले पाहिजे.

* मूल्याचा विचार करता ते शुद्ध संख्येत असले पाहिजे आणि ते मूल्य मालिकेतील किंवा श्रृंखलेतील एककाशी आणि श्रृंखलेच्या विचरणाच्या श्रेणीशी स्वतंत्र असले पाहिजे.

* जेव्हा वितरण हे सममितीय असते तेव्हा त्याचे मूल्य शुन्य असले पाहिजे.

* परिमाणाला अर्थपूर्ण अशी मापण प्रणाली असली पाहिजे ज्यावरून आपणास सहजपणे मापण केलेल्या मूल्याचे ध्वनीतार्थ काढता येतात.

१) कार्ल पिअरसनचा असममिती गुणांक

असममिती मापनाच्या या पद्धतीस पिअरसनचा असममिती गुणांक म्हणून सुद्धा ओळखले जाते. कारण ही पद्धती कार्ल पिअरसन या प्रसिद्ध ब्रिटीश सांख्यिकी शास्त्रज्ञाने सुचविली आहे. ही पद्धती माध्य आणि बहुलक यातील फरकावर आधारीत आहे, या फरकाला प्रमाण विचलनाने भाग दिल्यास सापेक्ष परिमाण मिळते. कार्ल पिअरसनच्या असममिती गुणांकाचे सुत्र पुढील प्रमाणे आहे.

$$j_p = \frac{\text{माध्य} - \text{बहुलक}}{\text{प्रमाण विचलन}}$$

येथे, j_p - पिअरसनचा असममिती गुणांक

$\overline{X}$ - माध्य

Z - बहुलक

σ - प्रमाण विचलन

जेव्हा बहुलकाचे निश्चित मूल्य माहित नसेल तेंव्हा,

बहुलक = 3 मध्यगा – 2 माध्य

$$Z = 3Me - 2\overline{X}$$

.या सुत्राचा उोग करून असममिती गुणांकाच्या सुत्रात बदल करता येतो.

$$j_p = \frac{\overline{X} - (3Me - 2\overline{X})}{\sigma}$$

$$= \frac{\overline{X} - 3Me + 2\overline{X}}{\sigma} = \frac{3\overline{X} - 3Me}{\sigma}$$

$$j_p = \frac{3(\overline{X} - Me)}{\sigma}$$

या मापकास सैद्धांतिकदृष्ट्या कुठलीही मर्यादा नाही आणि हाच छोटासा दोष आहे. परंतु प्रत्यक्ष व्यवहारामध्ये या सुत्राच्या सहाय्याने मिळालेले मूल्य हे दुर्मिळपणे अधिक उच्च असते आणि सामान्यपणे ± 1 च्या दरम्यान असते.

जेव्हा वितरण हे सममितीय असते तेव्हा माध्य, मध्यगा आणि बहुलक हे समान असतात आणि म्हणून असममिती गुणांक हा शुन्य असतो. जेव्हा वितरण हे धन असममितीय असेल तेव्हा असममिती गुणांकाचे चिन्ह धन असते आणि जेव्हा वितरण हे ऋण असममितीय असेल तेव्हा असममिती गुणांकाचे चिन्ह ऋण असते. म्हणून या सुत्राच्या सहाय्याने आपणास असममितीची दिशा आणि तिव्रता मिळते.

उदाहरण : एका बस डेपोतील बसेस ने एका दिवसात कापलेले अंतर पुढील प्रमाणे आहे, त्यावरून पिअरसनच्या पद्धतीने असममिती गुणांक काढा.

अंतर कि.मी.	10	20	30	40	50	60	70	80	90
बसेसची संख्या	16	20	29	49	61	42	23	8	2

उत्तर : समजा अंतर म्हणजे X आणि बसची संख्या म्हणजे f, A = 50.

X	f	dX	fdX	fdX^2
10	16	– 40	– 640	25600
20	20	– 30	– 600	18000
30	29	– 20	– 580	11600
40	49	– 10	– 490	4900
50	61	0	0	0
60	42	10	420	4200
70	23	20	460	6200
80	8	30	240	7200
90	2	40	80	3200
	250		– 1110	83900

वरील तक्त्यावरून A = 50, N = 250, $\sum fdX$ = – 1110 आणि $\sum fdX^2$ = 83900.

माध्य ($\overline{X}$)

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fdX}{N}$$

$$= 50 + \frac{-1110}{250}$$

$$= 50 - 4.44$$

$$\overline{X} = 45.56.$$

बहुलक (Z)

येथे निरिक्षणावरून बहुलकाचे मूल्य काढता येते आणि बहुलक 50 आहे कारण 50 या मूल्याची वारंवारिता सर्वात जास्त म्हणजेच 61 आहे.

$$Z = 50$$

प्रमाण विचलन (σ)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdX^2}{N} - \left(\frac{\sum fdX}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{83900}{250} - \left(\frac{-1110}{250}\right)^2}$$

$$= \sqrt{335.6 - (-4.44)^2}$$

$$= \sqrt{335.6 - 19.71}$$

$$= \sqrt{315.89}$$

$$\sigma = 17.77$$

कार्ल पिअरसनचा असममिती गुणांक

सूत्र, $j_p = \frac{\overline{X} - Z}{\sigma}$

$$= \frac{45.56 - 50}{17.77}$$

$$= \frac{-4.44}{17.77}$$

$j_p = -0.25$

$\therefore$ कार्ल पिअरसनचा असममिती गुणांक $j_p = -0.25$ आहे.

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे कार्ल पिअरसनचा असममिती गुणांक काढा.

नफा	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150
वारंवारिता	12	18	35	42	50	45	30	8

उत्तर : समजा नफा म्हणजे X आणि वारंवारिता म्हणजे *f*. A = 110.

X	*f*	M	*d*M	*fd*M	*fd*M²
70-80	12	75	– 35	– 420	14700
80-90	18	85	– 25	– 450	11250
90-100	35	95	– 15	– 525	7875
100-110	42	105	– 05	– 210	1050
110-120	50	115	05	250	1250
120-130	45	125	15	675	10125
130-140	30	135	25	750	18750
140-150	8	145	35	280	9800
	240		0	350	74800

वरील तक्त्यावरून A = 110, N = 240, $\sum fdM$ = 350 आणि $\sum fdM^2$ = 74800.

माध्य,

सुत्र $$\overline{X} = A + \frac{\sum fdM}{N}$$

$$= 110 + \frac{350}{240}$$

$$= 110 + 1.46$$

$$\overline{X} = 111.46$$

बहुलक,

बहुलक गट = 110 – 120

L = 110, f_0 = 42, f_1 = 50, f_2 = 45, i = 10.

सुत्र, $$Z = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$Z = 110 + \frac{50 - 42}{2(50) - 42 - 45} \times 10$$

$$Z = 110 + \frac{80}{100 - 87} \times 10$$

$$= 110 + \frac{80}{13}$$

$$= 110 + 6.15$$

$$Z = 116.5.$$

प्रमाण विचलन,

सुत्र, $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdM^2}{N} - \left(\frac{\sum fdM}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{74800}{240} - \left(\frac{350}{240}\right)^2}$$

$$= \sqrt{311.67 - (1.46)^2}$$

$$= \sqrt{311.67 - 2.13}$$

$$= \sqrt{309.54}$$

$$\sigma = 17.59$$

कार्ल पिअरसनचा असममिती गुणांक,

$$j_p = \frac{\overline{X} - Z}{\sigma}$$

$$= \frac{111.46 - 116.15}{17.59}$$

$$= \frac{-4.69}{17.59}$$

$$j_p = -\ 0.27.$$

$\therefore$ कार्ल पिअरसनचा असममिती गुणांक – 0.27 आहे.

२) बाऊलेचा असममिती गुणांक

बाऊले यांनी दिलेल्या असममिती गुणांकाच्या सुत्रामध्ये माध्य आणि बहुलक यांची मूल्ये विचारात घेतली नाहीत. सममितीय वितरणामध्ये दोन चतुर्थक हे मध्यगेपासून समान अंतरावर असतात. म्हणून मध्यगा आणि प्रथम चतुर्थक यातील फरक ($M - Q_1$) हा तृतीय चतुर्थक आणि मध्यगा यातील ($Q_3 - M$) या बरोबर असतो. या दोन फरकाचा फरक शुन्य असायला पाहिजे. असमामितीय वितरणामध्ये ($M - Q_1$) हा ($Q_3 - M$) च्या बरोबर नसतो आणि या दोन मूल्यातील फरकापासून आपणास असममितीचे निरपेक्ष परिमाण मिळते. म्हणून, बाऊलेचे निरपेक्ष असममितीचे सुत्र पुढील प्रमाणे आहे.

निरपेक्ष असममिती = $(Q_3 - M) - (M - Q_1) = Q_3 + Q_1 - 2M$

येथे Q_1 आणि Q_3 हे प्रथम आणि तृतीय चतुर्थक आहेत आणि M ही मध्यगा आहे जी दुसऱ्या किंवा द्वितीय चतुर्थकाबरोबर असते. असममितीच्या निरपेक्ष परिमाणाला $(Q_3 - M)$ आणि $(M - Q_1)$ यांच्या बेरजेने भागुन असममितीचे सापेक्ष परिमाण प्राप्त करता येते.

बाऊलेचा असममिती गुणांक (j_B) याचे सुत्र पुढील प्रमाणे आहे.

$$j_B = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)}$$

$$j_B == \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे चतुर्थक आणि मध्यगा यावर आधारित असममिती गुणांक काढा.

चल	5	10	15	20	25	30	35
वारंवारिता	2	7	11	15	10	4	1

उत्तर : समजा चल म्हणजे *X* आणि वारंवारिता म्हणजे *f*.

X	***f***	***cf***
5	2	2
10	7	9
15	11	20
20	15	35
25	10	45
30	4	49
35	1	50
	50	

मध्यगा (M)

$$M = \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ व्या मूल्याचा आखार}$$

$$= \left(\frac{50+1}{2}\right) \text{ व्या मूल्याचा आकार}$$

$$= \frac{51}{2} \text{ व्या मूल्याचा आकार}$$

$= 25.5$ व्या मूल्याचा आकार

$M = 20$

प्रथम चतुर्थक

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{ व्या मूल्याचा आकार}$$

$$= \left(\frac{50+1}{4}\right) \text{ व्या मूल्याचा आकार}$$

$$= \left(\frac{51}{4}\right) \text{ व्या मूल्याचा आकार}$$

$= 12.75$ व्या मूल्याचा आकार

$Q_1 = 15$

तृतीय चतुर्थक

$$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right) \text{ व्या मूल्याचा आकार}$$

$$= 3\left(\frac{50+1}{4}\right) \text{ व्या मूल्याचा आकार}$$

$= 3\left(\frac{51}{4}\right)$ व्या मूल्याचा आकार

= 3 (12.75) व्या मूल्याचा आकार

= 38.25 व्या मूल्याचा आकार

$Q_3 = 25$

बाऊलेचा असममिती गुणांक

$$j_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{25 + 15 - 2(20)}{25 - 15}$$

$$= \frac{40 - 40}{10}$$

$$= \frac{0}{10}$$

$j_B = 0.$

$\therefore$ असममिती गुणांक शुन्य आहे, म्हणजेच वितरण हे सममितीय आहे.

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे चतुर्थक आणि माध्यगा यावर आधारीत असममिती गुणांक काढा.

चल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
वारंवारिता	12	16	26	38	22	15	7	4

उत्तर : समजा चल म्हणजे X आणि वारंवारिता म्हणजे f.

X	*f*	*cf*
0-10	12	12
10-20	16	28
20-30	25	54
30-40	38	92
40-50	22	114
50-60	15	129
60-70	7	136
70-80	4	140
	140	

मध्यगा (M)

मध्यगा गट = $\left(\frac{N}{2}\right)$ व्या चलाचा आकार

= $\left(\frac{140}{2}\right)$ व्या चलाचा आकार

= 70 व्या चलाचा आकार

मध्यगा गट = 30–40

L = 30, C = 54, f = 38, i = 10.

सुत्र, $$M = L + \frac{N/4 - C}{f} \times i$$

$$= 30 + \frac{140/4 - 54}{38} \times 10$$

$$= 30 + \frac{70 - 54}{38} \times 10$$

$$= 30 + \frac{16 \times 10}{38}$$

$$= 30 + \frac{160}{38}$$

= 30 + 4.21

M = 34.21.

प्रथम चतुर्थक (Q_1)

चतुर्थक गट = $\left(\frac{N}{4}\right)$ व्या मूल्याचा आकार

= $\left(\frac{140}{4}\right)$ व्या मूल्याचा आकार

= 35 व्या मूल्याचा आकार

चतुर्थक गट = 20-30.

L = 20, C = 28, *f* = 20, *i* = 10.

सुत्र, $Q_1 = L + \frac{N/4 - C}{f} \times i$

$$= 20 + \frac{140/4 - 28}{26} \times 10$$

$$= 20 + \frac{35 - 28}{26} \times 10$$

$$= 20 + \frac{7 \times 10}{26}$$

$$= 20 + \frac{70}{26}$$

$$= 20 + 2.69$$

$$Q_1 = 22.69$$

तृतीय चतुर्थक (Q_3)

चतुर्थक गट = $3\left(\frac{N}{4}\right)$ व्या मूल्याचा आकार

= $3\left(\frac{140}{4}\right)$ व्या मूल्याचा आकार

= 3 (35) व्या मूल्याचा आकार

= 105 व्या मूल्याचा आकार

चतुर्थक गट = 40-50.

L = 40, C = 92, f = 22, i = 10.

सुत्र, $$Q_3 = L + \frac{3N/4 - C}{f} \times i$$

$$= 40 + \frac{3(140/4) - 92}{22} \times 10$$

$$= 40 + \frac{3(35) - 92}{22} \times 10$$

$$= 40 + \frac{105 - 92}{22} \times 10$$

$$= 40 + \frac{13 \times 10}{22}$$

$$= 40 + \frac{130}{22}$$

$= 40 + 5.90$

$Q_3 = 45.90$

बाऊलेचा असममिती गुणांक

$$j_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{45.90 + 22.69 - 2(34.21)}{45.90 - 22.69}$$

$$= \frac{68.59 - 68.42}{23.21}$$

$$= \frac{0.17}{23.21}$$

$j_B = 0.007$

$\therefore$ असममिती गुणांक 0.007 आहे.

३) केलेचा असममिती गुणांक

केलेचा असममिती गुणांक हा बाऊलेच्या सुत्राचे सुधारीत रूप आहे. बाऊलेच्या सुत्रामध्ये चतुर्थकांचा वापर केला आहे, ज्यात वितरणाची पहिले 25% आणि शेवटचे 25% मूल्ये वगळली आहेत. त्यामुळे केले यांनी असे सुचविले आहे की, चतुर्थकाऐवजी दशमक आणि शतमक यांचा वापर असममितीच्या मापनात केला आहे.

म्हणून केले यांचे सुत्र पुढील प्रमाणे आहे,

$$j_K = \frac{D_9 + D_1 - 2M}{D_9 - D_1} = \frac{P_{90} + P_{10} - 2M}{P_{90} - P_{10}}$$

येथे, D_9 - नववे दशमक

D_1 - पहिले दशमक

M - मध्यगा

P_{90} - नव्वदवे शतमक

P_{10} - दहावे शतमक

असममिती मापनाचे हे सुत्र अधिक लोकप्रिय नाही. कार्ल पिअरसनचे सुत्र असममितीचा अभ्यास करण्यासाठी मोठ्या प्रमाणात वापरले जाते.

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे केलेचा असममिती गुणांक काढा.

आकार	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
वारंवारिता	6	10	18	30	12	10	6	2

उत्तर : समजा आकार म्हणजे X आणि वारंवारिता म्हणजे *f*.

X	***f***	***cf***
10-20	6	6
20-30	10	16
30-40	18	34
40-50	30	64
50-60	12	76
60-70	10	86
70-80	6	92
80-90	2	94
	94	

मध्यगा (M)

मध्यगा गट $= \left(\frac{N}{2}\right)$ व्या चलाचा आकार

$= \frac{94}{2}$ व्या चलाचा आकार

$= 47$ व्या चलाचा आकार

मध्यगा गट $= 40\text{-}50.$

L = 30, $\frac{N}{2}$ = 47, C = 44, f = 18, i = 10.

सुत्र, $M = L + \frac{N/2 - C}{f} \times i$

$$= 40 + \frac{47 - 34}{18} \times 10$$

$$= 40 + \frac{13 \times 10}{18}$$

$$= 40 + \frac{130}{18}$$

= 40 + 7.22

M = 47.22.

पहिले दशमक (D_1) किंवा दहावे शतमक (P_{10})

दशमक गट किंवा शतमक गट = $\frac{N}{10}$ व्या किंवा $\frac{10N}{100}$ व्या मूल्याचा आकार

= $\frac{94}{10}$ व्या मूल्याचा आकार

= 410.44 व्या मूल्याचा आकार

दशमक गट किंवा शतमक गट = 420-30.

L = 30, $\frac{N}{10}$ किंवा $\frac{10N}{100}$ = 9.4, C = 6, f = 10, i = 10.

सुत्र D_1 किंवा $P_{10} = L + \frac{N/10 - C}{f} \times i$

$$= 30 + \frac{3.4 - 6}{10} \times 10$$

$= 30 + 3.4$

D_1 किंवा P_{10} = 33.4.

नववे दशमक (D_9) किंवा नव्वदावे शतमक (P_{90})

दशमक गट किंवा शतमक गट = $\frac{9N}{10}$ व्या किंवा $\frac{90N}{100}$ व्या मूल्याचा आकार

$= \frac{9(94)}{10}$ व्या मूल्याचा आकार

= 9 (9.4) व्या मूल्याचा आकार

= 84.6 व्या मूल्याचा आकार

दशमक गट किंवा शतमक गट = 60-70.

L = 60, $\frac{9N}{10}$ किंवा $\frac{90N}{100}$ = 84.6, C = 76, f = 10, i = 10.

सुत्र, D_9 किंवा $P_{90} = L + \frac{{}^{9N}\!/_{10} - C}{f} \times i$

$$= 60 + \frac{84.6 - 76}{10} \times 10$$

$= 60 + 8.6$

D_9 किंवा P_{90} = 68.6

केलेचा असममिती गुणांक

$$j_K = \frac{D_9 + D_1 - 2M}{D_9 - D_1} = \frac{P_{90} + P_{10} - 2M}{P_{90} - P_{10}}$$

$$= \frac{68.6 + 33.4 - 2(47.22)}{68.6 - 33.4}$$

$$= \frac{102 - 94.44}{35.2}$$

$$= \frac{5.56}{35.2}$$

$$j_K = 0.16.$$

$\therefore$ केलेचा असममिती गुणांक 0.16 आहे.

२.४ परिबल (Moments)

२.४.१ परिबल - अर्थ व संकल्पना

परिबल ही परिभ्रमण निर्माण करणाऱ्या प्रवृत्तीच्या संदर्भात असलेल्या शक्तीच्या मोजमापनासाठी एक परिचित यांत्रिक संज्ञा आहे. या प्रवृत्तीची शक्ती बल किती प्रमाणात आणि ज्या ठिकाणी शक्ती वापरली जाते त्याच्या मूळापासून अंतरावर अवलंबून असते.

- ट्रेडरिक मिल्स

परिबलाची वरील व्याख्या असे दर्शविते की, परिबलामध्ये दोन घटकांचा समावेश होतो.

१) शक्तीचे प्रमाण आणि २) ज्यापासून ते लागू केले गेले आहे.

जर f_1, f_2, f_3 हे तीन बल आहेत ते अनुक्रमे X_1, X_2, X_3 अंतरावर लागु केले आहेत तेव्हा,

f_1X_1 हा पहिल्या बलाचे परिबल होय

f_2X_2 हे दुसरे बल होय.

f_3X_3 हे तिसरे बल होय.

जर या परिबलाची बेरीज केली तर आपणास $\sum fX$ मिळते जे एकूण परिबल असते. जर एकुण परिबल $\sum fX$ ला एकुण बल $\sum f$ ने भागल्यास आपणास $\frac{\sum fX}{\sum f}$ हे मूल्य मिळते. ज्यास परिबल असे म्हणतात. परिबल काढण्याचे सुत्र $\frac{\sum fX}{\sum f}$ हे माध्याच्या मोजमापासाठी वापरलेल्या सुत्रासारखे आहे असे दिसून येते. सांख्यिकीमध्ये 'परिबल' हि संज्ञा वारंवारिता आणि संबंधित मूल्य या संदर्भात वापरली आहे. वारंवारितेला बल मानले आहे आणि मूल्याला आंतर मानले आहे.

माध्याचे मोजमाप करीत असताना वारंवारितेचा संबंधित मूल्यासोबत गुणाकार करतो, त्यागुणाकाराची बेरीज करून त्यास वारंवारितेच्या बेरजेने भागले जाते आणि येणारे मूल्य माध्य असते. या कारणासाठी गणितीय माध्याला आरंभबिंदू पासूनचे पहिले परिबल असे म्हणतात. जर आरंभबिंदू शुन्य नसेल तर माध्यापासूनचे पहिले परिबल हे $\frac{\sum d}{N}$ असते. येथे d हा चलाचे मूल्य (X) आणि माध्य $(\overline{X})$ यातील फरक दर्शवते, म्हणजेच, $d=(X-\overline{X})$. जर श्रेणी किंवा श्रृंखला किंवा पदमाला ही खंडित किंवा संतत असेल तर माध्यापासूनचे पहिले परिबल हे $\frac{\sum fd}{N}$ असते.

२.४.२ परिबलाची उद्दिष्ट्ये

वितरणाच्या स्वरूपाचा अभ्यास करण्यासाठी परिबलाचा वापर केला जातो. परिबल आपल्याला वितरण सममितीय आहे की नाही ते सांगते. परिबल आपणास वितरणाचे स्वरूप सुद्धा सांगते येथे सममितीय वक्र हा

१) सामान्य असतो.

२) सामान्य वक्रापेक्षा अधिक उंचीचा असतो.

३) सामान्य वक्रापेक्षा अधिक शिखराचा असतो.

याचाच अर्थ असा की, आपण परिबलाच्या सहाय्याने वितरणाच्या असममितीचा अभ्यास करतो. सममितीय वक्र सामान्य आहे किंवा नाही हे सुद्धा अभ्यासले जाते. सर्व सममितीय वक्र हे सामान्य नसतात आणि सममितीय वक्र आणि सामान्य वक्र यातील फरक शोधून काढण्यासाठी परिबलाची मदत होते.

२.४.३ माध्यापासूनचे परिबल

माध्यापासून काढलेले परिबल हे सामान्यपणे μ (म्यू) या अक्षराने दर्शविले जाते. म्हणून माध्यापासूनचे विविध परिबल पुढील प्रमाणे असतात.

साध्या किंवा व्यक्तीगत पदमालेत माध्यापासूनचे परिबल

माध्यापासूनचे पहिले परिबल $\mu_1 = \frac{\sum(X-\overline{X})}{N} = \frac{\sum d}{N}$

माध्यापासूनचे दुसरे परिबल $\mu_2 = \frac{\sum(X-\overline{X})^2}{N} = \frac{\sum d^2}{N}$

माध्यापासूनचे तिसरे परिबल $\mu_3 = \frac{\sum(X-\overline{X})^3}{N} = \frac{\sum d^3}{N}$

माध्यापासूनचे चौथे परिबल $\mu_4 = \frac{\sum(X-\overline{X})^4}{N} = \frac{\sum d^4}{N}$

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे चार केंद्रीय परिबल काढा.

अनुक्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
उंची	151	152	153	154	155	156	157	158	159	165

उत्तर : समजा उंची म्हणजे X.

X	$(X-\overline{X})$	$(X-\overline{X})^2$	$(X-\overline{X})^3$	$(X-\overline{X})^4$
151	– 5	25	– 125	625
152	– 4	16	– 64	256
153	– 3	9	– 27	81
154	– 2	4	– 8	16
155	– 1	1	– 1	1
156	0	0	0	0
157	1	1	1	1
158	2	4	8	16
159	3	9	27	81
165	9	81	729	6561
1560	0	150	540	7638

माध्य,

सुत्र $\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$

$$= \frac{1560}{10}$$

$\overline{X}$ = 156.

वरील तक्त्यावरून

$\sum(X - \overline{X}) = 0$, $\sum(X - \overline{X})^2 = 150$, $\sum(X - \overline{X})^3 = 540$, $\sum(X - \overline{X})^4 = 7638$.

पहिले परिबल

$$\mu_1 = \frac{\sum(X - \overline{X})}{N} = \frac{0}{10} = 0$$

दुसरे परिबल

$$\mu_2 = \frac{\sum(X - \overline{X})^2}{N} = \frac{150}{10} = 15$$

तिसरे परिबल

$$\mu_3 = \frac{\sum(X - \overline{X})^3}{N} = \frac{540}{10} = 54$$

चौथे परिबल

$$\mu_4 = \frac{\sum(X - \overline{X})^4}{N} = \frac{7638}{10} = 763.8$$

$\therefore$ चार केंद्रीय परिबले पुढील प्रमाणे आहेत.

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 15$, $\mu_3 = 54$, $\mu_4 = 763.8$.

खंडित पदमालेत किंवा संतत पदमालेत माध्यापासूनचे परिबल

माध्यापासूनचे पहिले परिबल $\mu_1 = \frac{\sum f(X-\overline{X})}{N} = \frac{\sum fd}{N}$

माध्यापासूनचे दुसरे परिबल $\mu_2 = \frac{\sum f(X-\overline{X})^2}{N} = \frac{\sum fd^2}{N}$

माध्यापासूनचे तिसरे परिबल $\mu_3 = \frac{\sum f(X-\overline{X})^3}{N} = \frac{\sum fd^3}{N}$

माध्यापासूनचे चौथे परिबल $\mu_4 = \frac{\sum f(X-\overline{X})^4}{N} = \frac{\sum fd^4}{N}$

येथे $d = (X-\overline{X})$ आणि $N = \sum f$.

परिबलाचा विस्तार पुढे करता येतो की, μ_5 , μ_6 किंवा अधिक परंतु प्रत्यक्ष व्यवहारामध्ये पहिले चार परिबलाच्या सहाय्याने आपण पदमालेचे विवेचन करू शकतो.

उदाहरण : पुढील आकडेवारीच्या सहाय्याने चार केंद्रीय परिबल काढा.

X	11	13	14	15	16
f	1	2	3	4	5

उत्तर :

X	f	fX	$(X-\overline{X})$	$f(X-\overline{X})$	$f(X-\overline{X})^2$	$f(X-\overline{X})^3$	$f(X-\overline{X})^4$
11	1	11	– 3	– 3	9	– 27	81
13	2	26	– 1	– 2	2	– 2	2
14	3	42	0	0	0	0	0
15	3	45	1	3	3	3	3
16	1	16	2	2	4	8	16
	15	140		0	18	–18	102

माध्य, $\overline{X} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{140}{10} = 14$

$\overline{X} = 14$

वरील तक्त्यावरून

$\sum f(X-\overline{X}) = 0$, $\sum f(X-\overline{X})^2 = 18$, $\sum f(X-\overline{X})^3 = -18$, $\sum f(X-\overline{X})^4 = 102$.

पहिले परिबल

$$\mu_1 = \frac{\sum f(X-\overline{X})}{N} = \frac{0}{10} = 0$$

दुसरे परिबल

$$\mu_2 = \frac{\sum f(X-\overline{X})^2}{N} = \frac{18}{10} = 1.8$$

तिसरे परिबल

$$\mu_3 = \frac{\sum f(X-\overline{X})^3}{N} = \frac{-18}{10} = -1.8$$

चौथे परिबल

$$\mu_4 = \frac{\sum f(X-\overline{X})^4}{N} = \frac{102}{10} = 10.2$$

$\therefore$ चार केंद्रीय परिबल $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1.8$, $\mu_3 = -1.8$ आणि $\mu_4 = 10.2$ आहेत.

वितरणाच्या स्वरूपाचा अभ्यास करण्यासाठी μ_1, μ_2, μ_3 आणि μ_4 या चार परिबलाच्या सहाय्याने दोन स्थिरांकांचे मापन केले जाते.

ते स्थिरांक म्हणजे,

β_1 (बिटा एक असे वाचतात) $= \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$

β_2 (बिटा दोन असे वाचतात) $= \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

β_1 हा स्थिरांक आपणास वितरण हे सममितीय आहे की असममितीय आहे सांगतो. β_2 हा स्थिरंक आपणास सममितीय वक्र आणि सामान्य वक्र यातील फरक स्पष्ट करतो. यालाच वशिंडता असे म्हणतात.

२.४.४ गृहीत माध्यापासूनचे परिबल (Moments About an Arbitrary Origin)

जेंव्हा वितरणाचे गणितीय माध्य हे पूर्ण संख्या नसते आणि ते अपूर्णांकात असते तेंव्हा $(X - \overline{X})$ अशी विचलन घेणे हे खुप क्लिष्ट काम होते आणि त्यानंतर वर्ग, घन व चौथा घात $(X - \overline{X})^2$, $(X - \overline{X})^3$ आणि $(X - \overline{X})^4$ जे आपण माध्यापासूनचे विविध परिबल काढण्यासाठी वापरतो हि अडचण दूर करण्यासाठी आपण गृहीत माध्य (A) पासून विचलन घेऊ शकतो आणि माध्यापासूनच्या परिबलाच्या सुत्रामध्ये समायोजन करू शकतो. गृहीत माध्य (A) पासून काढलेले परिबल हे सामान्यपणे μ_1', μ_2' इत्यादी. अशाप्रकारे दर्शविले जातात. कारण माध्यापासूनच्या परिबलापासून म्हणजेच μ_1, μ_2 इत्यादी पासून फरक करावा लागतो. तथापी आपण A या गृहीत माध्यापासून काढलेल्या परिबलाला δ_1, δ_2 इत्यादी असे दर्शवूया जेणेकरून दोहोमधील फरक स्पष्ट होईल.

साध्या किंवा व्यक्तीगत पदमालेत गृहीत माध्य A पासून काढलेले परिबल पुढील प्रमाणे आहेत.

पहिले परिबल $\delta_1 = \frac{\sum(X - A)}{N} = \frac{\sum X}{N} - \frac{NA}{N} = \overline{X} - A$

दुसरे परिबल $\delta_2 = \frac{\sum(X - A)^2}{N}$

तिसरे परिबल $\delta_3 = \frac{\sum(X - A)^3}{N}$

चौथे परिबल $\delta_4 = \dfrac{\Sigma(X-A)^4}{N}$

जर वितरण हे खंडित वारंवारिता वितरण किंवा संतत वारंवारिता वितरण असेल तर गृहीत माध्य W पासून काढलेले परिबल पुढील प्रमाणे असतात.

पहिले परिबल $\delta_1 = \dfrac{\Sigma f(X-A)}{N} = \dfrac{\Sigma fX}{N} - \dfrac{NA}{A} = \overline{X} - A$

दुसरे परिबल $\delta_2 = \dfrac{\Sigma f(X-A)^2}{N}$

तिसरे परिबल $\delta_3 = \dfrac{\Sigma f(X-A)^3}{N}$

चौथे परिबल $\delta_4 = \dfrac{\Sigma f(X-A)^4}{N}$

जेथे A गृहीत माध्य आणि $N = \Sigma f$ आहे.

गृहीत माध्यापासूनच्या परिबलाचे प्रत्यक्ष माध्यापासूनच्या परिबलात रूपांतर

गृहीत माध्यापासून काढलेल्या परिबलाचे प्रत्यक्ष माध्यापासूनच्या परिबलामध्ये रूपांतर करता येते. या दोन प्रकारच्या परिबलातील (μ आणि δ) संबंध पुढील प्रमाणे आहेत.

$$\mu_1 = \frac{\Sigma(X-\overline{X})}{N} = \frac{\Sigma(X-\overline{X}+A-A)}{N} = \frac{\Sigma\left[(X-A)-(\overline{X}-A)\right]}{N}$$

$$\mu_1 = \frac{\Sigma(X-A)}{N} - \frac{\Sigma(\overline{X}-A)}{N} = \left(\frac{\Sigma X}{N} - \frac{NA}{N}\right) - \left(\frac{N\overline{X}}{N} - \frac{NA}{N}\right)$$

$$\mu_1 = (X-A)-(\overline{X}-A) = \delta_1 - \delta_1 = 0$$

$$\mu_2 = \delta_2 - \delta_1^2$$

$$\mu_3 = \delta_3 - 3\delta_1\delta_2 + 2\delta_1^3$$

$$\mu_4 = \delta_4 - 4\delta_1\delta_3 + 6\delta_2\delta_1^2 - 3\delta_1^4$$

उदाहरण : एका दिवसात 10 बसस्थानकात प्राप्त झालेल्या तक्रारी पुढील प्रमाणे आहेत त्याआधारे परिबल काढा.

अनुक्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
तक्रारी	2	4	5	7	8	9	11	12	13	14

उत्तर : समजा तक्रारी म्हणजे X आणि A = 8.

X	(X – A)	$(X-A)^2$	$(X-A)^3$	$(X-A)^4$
2	– 6	36	– 216	1296
4	– 4	16	– 64	256
5	– 2	4	– 27	81
7	– 1	1	– 1	1
8	0	0	0	0
9	1	1	1	1
11	3	9	27	81
12	4	16	64	256
13	5	25	125	625
14	6	36	216	1296
	5	149	125	3893

वरील तक्त्यावरून

$\sum(X-A)=5$, $\sum(X-A)^2=149$, $\sum(X-A)^3=125$, $\sum(X-A)^4=3893$.

पहिले परिबल

$$\delta_1=\frac{\sum(X-A)}{N}=\frac{5}{10}=0.5$$

दुसरे परिबल

$$\delta_2 = \frac{\sum(X-A)^2}{N} = \frac{149}{10} = 14.9$$

तिसरे परिबल

$$\delta_3 = \frac{\sum(X-A)^3}{N} = \frac{125}{10} = 12.5$$

चौथे परिबल

$$\delta_4 = \frac{\sum(X-A)^4}{N} = \frac{3893}{10} = 389.3$$

आता आपण गृहीत माध्यापासूनच्या परिबलाचे प्रत्यक्ष माध्यापासूनच्या परिबलात रूपांतर करूया,

$$\mu_1 = \delta_1 - \delta_1 = 0.5 - 0.5 = 0$$

$$\mu_2 = \delta_2 - \delta_1^2 = 14.9 - (0.5)^2 = 14.9 - 0.25 = 14.658$$

$$\mu_3 = \delta_3 - 3\delta_1\delta_2 + 2\delta_1^3 = 12.5 - 3(0.5)(14.9) + 2(0.5)^3$$

$$\mu_3 = 12.5 - 22.35 + 2(0.125) = 12.5 - 22.35 + 0.25$$

$$\mu_3 = -9.6$$

$$\mu_4 = \delta_4 - 4\delta_1\delta_3 + 6\delta_2\delta_1^2 - 3\delta_1^4$$

$$= 389.3 - 4(0.5)(12.5) + 6(14.9)(0.5)^2 - 3(0.5)^4$$

$$= 389.3 - 25 + +6(14.9)(0.25) - 3(0.0625)$$

$$= 389.3 - 25 + 22.35 - 0.1875$$

$$\mu_4 = 386.46$$

$\therefore$ चार परिबल $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 14.65$, $\mu_3 = -9.6$ आणि $\mu_4 = 386.46$ आहेत.

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे चार केंद्रीय परिबल काढा.

X	2	4	5	6	7
f	1	2	2	3	2

उत्तर : समजा A = 5.

X	f	(X – A)	f (X – A)	f $(X - A)^2$	f $(X - A)^3$	f $(X - A)^4$
2	1	– 3	– 3	9	– 27	81
4	2	– 1	– 2	2	– 2	2
5	2	0	0	0	0	0
6	3	1	3	3	3	3
7	2	2	4	8	16	32
	10		2	22	– 10	148

वरील तक्त्यावरून

N = 10, $\sum f(X-A) = 2$, $\sum f(X-A)^2 = 22$, $\sum f(X-A)^3 = -10$ आणि $\sum f(X-A)^4 = 148$.

पहिले परिबल $\delta_1 = \frac{\sum f(X-A)}{N} = \frac{2}{10} = 0.2$

दुसरे परिबल $\delta_2 = \frac{\sum f(X-A)^2}{N} = \frac{22}{10} = 2.2$

तिसरे परिबल $\delta_3 = \frac{\sum f(X-A)^3}{N} = \frac{-10}{10} = -1$

चौथे परिबल $\delta_4 = \frac{\sum f(X-A)^4}{N} = \frac{148}{10} = 14.8$

आता आपण गृहीत माध्यापासून काढलेल्या परिबलाचे प्रत्यक्ष माध्यापासूनच्या परिबलात रूपांतर करूया.

$$\mu_1 = \delta_1 - \delta_1 = 0.2 - 0.2 = 0$$

$$\mu_2 = \delta_2 - \delta_1^2 = 2.2 - (0.2)^2 = 2.2 - 0.04 = 2.16$$

$$\mu_3 = \delta_3 - 3\delta_1\delta_2 + 2\delta_1^3 = -1 - 3(0.2)(2.2) + 2(0.2)^2$$

$$= -1 - 1.42 + 2(0.04)$$

$$= -1 - 1.42 + 0.08$$

$$\mu_3 = -2.34$$

$$\mu_4 = \delta_4 - 4\delta_1\delta_3 + 6\delta_2\delta_1^2 - 3\delta_1^4$$

$$= 14.8 - 4(0.2)(-1) + 6(2.2)(0.2)^2 - 3(0.2)^4$$

$$= 14.8 + 0.8 + 6(2.2)(0.04) - 3(0.0016)$$

$$= 14.8 + 0.8 + 0.528 - 0.0048$$

$$\mu_4 = 16.1213$$

$\therefore$ चार केंद्रीय परिबल $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2.16$, $\mu_3 = -2.34$ आणि $\mu_4 = 16.1213$ आहे.

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे चार केंद्रीय परिबल काढा.

गुण	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
विद्यार्थी संख्या	8	12	20	30	15	10	5

उत्तर : समजा A = 35

गुण	X	f	(X – A)	f (X – A)	$f(X-A)^2$	$f(X-A)^3$	$f(X-A)^4$
0-10	8	5	–30	–240	7200	–216000	51840000
10-20	12	15	–20	–240	4800	–96000	23040000
20-30	20	25	–10	–200	2000	–20000	4000000
30-40	30	35	0	0	0	0	0
40-50	15	45	10	150	1500	15000	2250000
50-60	10	55	20	200	4000	80000	16000000
60-70	5	65	30	150	4500	135000	20250000
	100			–180	24000	–102000	117380000

वरील तक्त्यावरून

N = 100, $\sum f(X-A) = -180$, $\sum f(X-A)^2 = 24000$, $\sum f(X-A)^3 = -102000$, $\sum f(X-A)^4 = 117380000$.

पहिले परिबल $\delta_1 = \dfrac{\sum f(X-A)}{N} = \dfrac{-180}{100} = -1.8$

दुसरे परिबल $\delta_2 = \dfrac{\sum f(X-A)^2}{N} = \dfrac{24000}{100} = 240$

तिसरे परिबल $\delta_3 = \dfrac{\sum f(X-A)^3}{N} = \dfrac{-102000}{100} = -1020$

चौथे परिबल $\delta_4 = \dfrac{\sum f(X-A)^4}{N} = \dfrac{117380000}{100} = 1173800$

गृहीत माध्यापासूनच्या परिबलाचे प्रत्यक्ष माध्यापासूनच्या परिबला रूपांतर

$$\mu_1 = \delta_1 - \delta_1 = -1.8 - (-1.8) = -1.8 + 1.8 = 0$$

$$\mu_2 = \delta_2 - \delta_1^2 = 240 - (-1.8)^2 = 240 - 3.24 = 236.76$$

$$\mu_3 = 3\delta_1\delta_2 + 2\delta_1^3 = -1020 - 3(-1.8)(240) + 2(-1.8)^3$$

$$= -1020 + 1296 - 11.664$$

$$\mu_3 = 264.336$$

$$\mu_4 = \delta_4 - 4\delta_1\delta_3 + 6\delta_2\delta_1^2 - 3\delta_1^4$$

$$\mu_4 = 1173800 - 4(-1.8)(-10.20) + 6(240)(-1.8)^2 - 3(-1.8)^4$$

$$= 117800 - 7344 + 6(240)(3.24) - 3(10.4976)$$

$$= 1173800 - 7344 + 4665.6 - 31.4928$$

$$\mu_4 = 1171090.1072$$

$\therefore$ चार केंद्रीय परिबल $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 236.76$, $\mu_3 = 264.336$ आणि $\mu_4 = 1171090.1072$ आहेत.

उदाहरण : एका वितरणाचे X = 2 गृहीत माध्यापासून काढलेले पहिले चार परिबल अनुक्रमे 1, 2.5, 5.5 आणि 16 आहेत. या आधारे माध्यावर आधारीत चार परिबल काढा.

उत्तर : गृहीत माध्यापासून काढलेले पहिले चार परिबल

$$\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2.5,\ \mu_3 = 5.5,\ \mu_4 = 16$$

प्रत्यक्ष माध्यापासूनचे परिबल

$$\mu_1 = \delta_1 - \delta_1 = 1 - 1 = 0$$

$$\mu_2 = \delta_2 - \delta_1^2 = 2.5 - (1)^2 = 2.5 - 1 = 1.5$$

$$\mu_3 = \delta_3 - 3\delta_1\delta_2 + 2\delta_1^3 = 5.5 - 3(1)(2.5) + 2(1)^3$$

$$= 5.5 - 7.5 + 2(1)$$

$$= 5.5 - 7.5 + 2$$

$$\mu_3 = 0$$

$$\mu_4 = \delta_4 - 4\delta_1\delta_3 + 6\delta_2\delta_1^2 - 3\delta_1^4$$

$$= 16 - 4(1)(5.5) + 6(2.5)(1)^2 - 3(1)^4$$

$$= 16 - 22 + 6(2.5)(1) - 3(1)$$

$$= 16 - 22 + 15 - 3$$

$$\mu_4 = 6$$

$$\therefore \mu_1 = 0,\ \ \mu_2 = 1.5,\ \ \mu_3 = 0,\ \ \mu_4 = 6.$$

२.५ वशिंडता (Kurtosis)

२.५.१ वशिंडता - अर्थ व संकल्पना

वशिंडतेचा ग्रीक भाषेतील अर्थ ‘‘भारीपणा’’ असा आहे. सांख्यिकीमध्ये वशिंडता म्हणजे वारंवारिता वितरणाच्या बहुलकाविषयी श्रेत्राची पसरटपणा किंवा शिखरपणाची श्रेणी होय. वितरणाच्या वशिंडतेची श्रेणी ही सामान्य वक्राच्या शिखरपणाच्या तुलनेत मोजली जाते. वशिंडतेचे मापक आपणास कुठल्या तीव्रतेपर्यंत एखादे वितरण सामान्य वक्रापेक्षा शिखरपणा किंवा पसरट किंवा सपाट असलेले असते ते सांगते. जर वितरणाचा वक्र सामान्य वक्रापेक्षा अधिक सपाट असेल तर त्यास ‘अल्पवशिंडी’ असे म्हणतात. सामान्य वक्रास मध्यवशिंडी असे म्हणतात. जर वितरणाचा वक्रसामान्य वक्रापेक्षा अधिक शिखरयुक्त असेल तर त्यास ‘उंचवशिंडी’ असे म्हणतात. सपाटपणा किंवा शिखरपणाच्या अटीलाच वशिंडता असे म्हणतात. वशिंडतेची संकल्पनेचा वापर मुलभूत सांख्यिकीय विश्लेषणात दुर्मिळ वापर केला जातो.

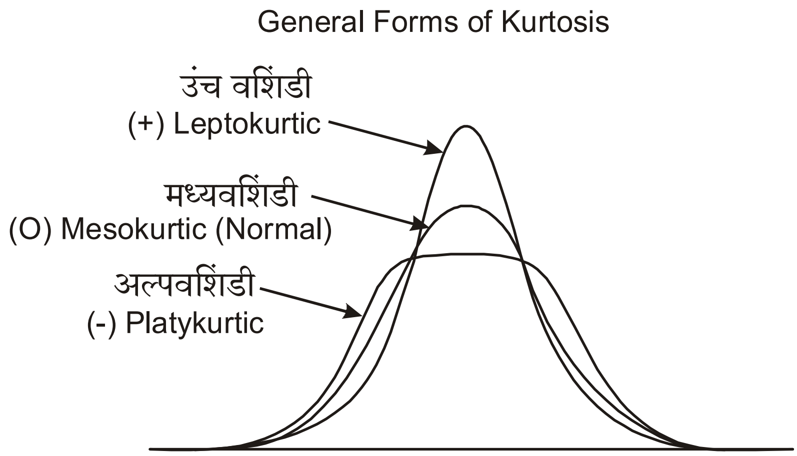
वशिंडता म्हणजे वितरणाच्या शिखरपणाची श्रेणी होय.

उंच पातळ वितरणास ‘उंचशिंडी’ असे म्हणतात.

पसरट वितरणास 'अल्पवशिंडी' असे म्हणतात.

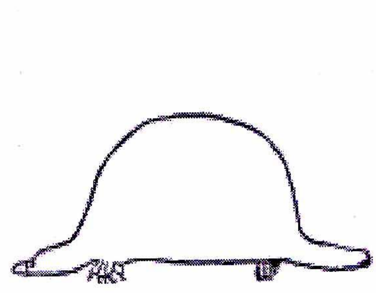
सामान्य वितरणास 'मध्यवशिंडी' असे म्हणतात.

पुढील आकृतीमध्ये वरील तीन प्रकारचे वक्र स्पष्ट करता येतील.

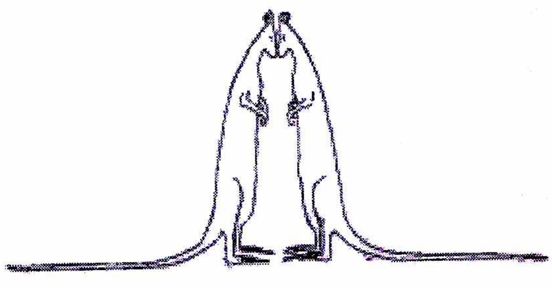


प्रसिद्ध ब्रिटीश संख्याशास्त्रज्ञ विलियम गॉसेट (student) यांनी खुप विनोदी स्वरूपात या वक्राचे स्वरूप व्यक्त केले आहे. त्याच्या मते, अल्पवशिंडी वक्र हे प्लॅटेपस (platypus) या छोट्या शेपटीच्या पाय दुमडून बसलेल्या प्राण्यासारखे असतात आणि उंच वशिंडी वक्र हे लांब शेपटी असलेले दोन कांगारू एकमेकासमोर उभे असल्यासारखे असतात.

गॉसेट यांची रेखाटने प्रस्तुत केलेले आहेत.



प्लॅटेपस



कांगारू

२.५.२ वशिंडतेचे मापन (Measures of Kurtosis)

वशिंडतेचे अतिशय महत्त्वाचे मापक म्हणजे β_2 या गुणांकाचे मूल्य होय.

त्याची व्याख्या पुढीलप्रमाणे केली आहे.

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{{\mu_2}^2}$$

येथे μ_4 चौथे परिबल आणि μ_2 - दुसरे परिबल आहे. जेवढे β_2 चे मूल्य जास्त तेवढे वितरणाचे शिखर मोठे असते.

सामान्य वक्रासाठी β_2 चे मूल्य हे 3 असते. म्हणजेच $\beta_2 = 3$ जेव्हा β_2 चे मूल्य हे 3 पेक्षा जास्त असते ($\beta_2 > 3$) तेव्हा वक्र हा सामान्य वक्रापेक्षा अधिक उंचीचा असते. म्हणजेच, उंचवशिंडी असतो. जेव्हा β_2 चे मूल्य हे 3 पेक्षा कमी असते ($\beta_2 < 3$) तेव्हा वक्र हा सामान्य वक्रापेक्षा कमी उंचीचा असतो. म्हणजेच, अल्पवशिंडी असते $\beta_2 = 3$ सोबतचे सामान्य वक्र इतर वक्र यांना माध्यावशिंडी असे म्हणतात.

काही γ_2 हा β_2 चा विकलज याचा वापर वशिंडतेचे मापन करण्यासाठी केला जातो. γ_2 ची व्याख्या पुढील प्रमाणे करता येते.

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3$$

सामान्य विवरणासाठी $\gamma_2 = 0$ असते. जेऱ्हा γ_2 हे धनात्मक असते तेव्हा वक्र हा उंचवशिंडी असतो आणि जेव्हा γ_2 हे ऋणात्मक असते तेव्हा वक्र हा अल्पवशिंडी असतो.

उदाहरण : 10 बसस्थानकामध्ये एका दिवसात प्राप्त झालेल्या तक्रारी पुढील प्रमाणे आहेत. त्यावरून परिबल काढा आणि वितरणाचे विश्लेषण करा.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f	1	8	28	56	70	56	28	8	1

उत्तर :

X	f	fX	$(X-\overline{X})$	$f(X-\overline{X})$	$f(X-\overline{X})^2$	$f(X-\overline{X})^3$	$f(X-\overline{X})^4$
0	1	0	– 4	– 4	16	– 64	256
1	8	8	– 3	– 24	72	– 216	648
2	28	56	– 2	– 56	112	– 224	448
3	56	168	– 1	– 56	56	– 56	56
4	70	280	0	0	0	0	0
5	56	280	1	56	56	56	56
6	28	168	2	56	56	224	448
7	8	56	3	24	24	216	648
8	1	8	4	4	4	64	256
	256	1024	0	0	512	0	2816

माध्य $\overline{X} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{1024}{256} = 4$

$\overline{X} = 4$

वरील तक्त्यावरून $\sum f(X-\overline{X}) = 0$, $\sum f(X-\overline{X})^2 = 512$, $\sum f(X-\overline{X})^3 = 0$, $\sum f(X-\overline{X})^4 = 2816$, N = 256.

पहिले परिबल $\mu_1 = \frac{\sum f(X-\overline{X})}{N} = \frac{0}{256} = 0$

दुसरे परिबल $\mu_2 = \frac{\sum f(X-\overline{X})^2}{N} = \frac{512}{256} = 2$

तिसरे परिबल $\mu_3 = \dfrac{\sum f\left(X-\overline{X}\right)^3}{N} = \dfrac{0}{256} = 0$

चौथे परिबल $\mu_4 = \dfrac{\sum f\left(X-\overline{X}\right)^4}{N} = \dfrac{2816}{256} = 11$

$$\beta_1 = \frac{{\mu_3}^3}{{\mu_2}^2} = \frac{0^3}{2^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\beta_1 = 0$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{{\mu_2}^2} = \frac{11}{2^2} = \frac{11}{4} = 2.75$$

$\therefore \beta_1 = 0$ म्हणजे वितरण सममितीय आहे आणि $\beta_2 = 2.75$ म्हणजेच $\beta_2 < 3$ म्हणजे वितरण वक्र हा अल्पवशिंडी आहे.

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे चार केंद्रीय परिबल काढा आणि वितरणाचे विश्लेषण करा.

गुण	0-10	10-20	20-30	30-40
विद्यार्थी संख्या	1	3	4	2

उत्तर :

गुण	X	f	fX	$\left(X-\overline{X}\right)$	$f\left(X-\overline{X}\right)$	$f\left(X-\overline{X}\right)^2$	$f\left(X-\overline{X}\right)^3$	$f\left(X-\overline{X}\right)^4$
0-10	1	5	5	− 17	− 17	289	− 4913	83521
10-20	3	15	45	− 7	− 21	147	− 1029	7203
20-30	4	25	100	3	12	36	108	324
30-40	2	35	70	13	26	338	4394	57122
		10		220	0	810 −	1440 148170	

माध्य $\overline{X} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{220}{10} = 22$

वरील तक्त्यावरून $\sum f(X-\overline{X}) = 0$, $\sum f(X-\overline{X})^2 = 810$, $\sum f(X-\overline{X})^3 = -1440$, $\sum f(X-\overline{X})^4 = 148170$, N = 10.

पहिले परिबल $\mu_1 = \frac{\sum f(X-\overline{X})}{N} = \frac{0}{10} = 0$

दुसरे परिबल $\mu_2 = \frac{\sum f(X-\overline{X})^2}{N} = \frac{810}{10} = 81$

तिसरे परिबल $\mu_3 = \frac{\sum f(X-\overline{X})^3}{N} = \frac{-1440}{10} = -144$

चौथे परिबल $\mu_4 = \frac{\sum f(X-\overline{X})^4}{N} = \frac{148170}{10} = 14817$

$$\beta_1 = \frac{{\mu_3}^3}{{\mu_2}^2} = \frac{(-144)^3}{(81)^2} = \frac{-2985984}{6561} = -455.11$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{{\mu_2}^2} = \frac{14817}{(81)^2} = \frac{14817}{6561} = 2.26$$

$\therefore \beta_1 = -455.11$ म्हणजे वितरण ऋणात्मक असममितीय आहे आणि $\beta_2 = 2.26$ म्हणजेच $\beta_2 < 3$ म्हणजे वितरण वक्र हा अल्पवर्शिंडी आहे.

आपली प्रगती तपासा - १

दिलेल्या पर्यायातून योग्य पर्याय निवडा.

१. एका वितरणाची मध्यगा 8, प्रथम चतुर्थक 8 आणि तृतीय चतुर्थक 12 आहे तर असममिती गुणांक हा .... असेल.

(अ) ± 8 (ब) ± 1 (क) ± 9 (ड) ± 11

२. असममितीय परिमाणात निरपेक्ष असममिती ही .... बरोबर असते.

(अ) माध्य + बहुलक (ब) माध्य - बहुलक

(क) माध्य + बहुलक (ड) माध्य - मध्यगा

३. वशिंडतेमध्ये वारंवारिता वक्राचे शिखर घंटेच्या आकाराच्या सामान्य वक्रापेक्षा पसरट असेल त्यास .... म्हणतात.

(अ) अल्पवशिंडता (ब) उंचवशिंडता (क) मध्य वशिंडता (ड) मेगा वक्र

४. वशिंडते मध्ये सामान्य वक्राला .... म्हणतात.

(अ) अल्पवशिंडी (ब) उंचवशिंडी (क) मध्यवशिंडी (ड) सामान्य वशिंडी

५. असममिती आणि गणितीय माध्य अनुक्रमे 4 आणि 17 आहेत, तर बहुलकाचे मूल्य काय असेल ?

(अ) 68 (ब) 5.25 (क) 21 (ड) 13

आपली प्रगती तपासा - २

एक किंवा दोन वाक्यात उत्तरे द्या.

१. असममिती म्हणजे काय ?

२. वशिंडता म्हणजे काय ?

३. परिबल म्हणजे काय ?

४. कार्ल पिअरसनचे असममिती गुणांकाचे सुत्र सांगा.

५. अल्पवशिंडता म्हणजे काय ?

२.६ सारांश

विद्यार्थी मित्रहो या घटकामध्ये आपण वितरणातील सममिती आणि असममिती याचा अभ्यास केला. तसेच असममितीचे प्रकार अभ्यासले. असममिती मापनाची परिमाणे यांचा सविस्तर अभ्यास केला. तसेच परिबल या संकल्पनेच्या सहाय्याने सुद्धा असममिती गुणांक कसा काढता येतो हे सुद्धा अभ्यासले. शेवटी वशिंडतेची संकल्पना अभ्यासली. वशिंडतेचे विविध प्रकार - अल्पवशिंडी, मध्यवशिंडी आणि उंचवशिंडी याचा सुद्धा अभ्यास केला. याचबरोबर वशिंडतेचे मापन परिबलाच्या सहाय्याने कसे केले जाते हे अभ्यासले.

२.७ पारिभाषिक शब्द

१. असममिती - सममिती पासून दूर जाणे म्हणजे असममिती.

२. वशिंडता - वशिंडता म्हणजे वारंवारिता वक्राच्या शिखरपणा किंवा सपाटपणची श्रेणी.

३. परिबल - परिबल ही परिभ्रमण निर्माण करणाऱ्या प्रवृत्तीच्या संदर्भात असलेल्या शक्तीच्या मोजमापनासाठी एक परिचित यांत्रिक संज्ञा आहे.

४. असममिती गुणांक - दिलेल्या वितरणातील बहुलकापासून इतर घटक कशा प्रकारे विखुरलेले आहेत ते सांगते.

५. वशिंडता गुणांक - वशिंडता गुणांक हे वारंवारिता वक्राच्या उंचीच्या विषमतेचे सापेक्ष मापक किंवा परिमाण होय.

२.८ आपली प्रगती तपासा उत्तरे

आपली प्रगती तपासा - १

१. ± 1

२. माध्य - बहुलक

३. उंचवशिंडता

४. मध्यवशिंडी

५. 13

आपली प्रगती तपासा - १

१. सममितीचा अभाव म्हणजे असममिती होय. तसेच माध्य, मध्यगा व बहुलक समान नसणे होय.

२. वारंवारिता वक्राचा आकार कसा आहे तो सामान्य वक्रा पेक्षा कमी उंचीचा आहे आणि पसरट आहे किंवा तो सामान्य वक्रापेक्षा जास्त उंचीचा आणि कमी जाडीचा आहे यालाच वशिंडता असे म्हणतात.

३. परिबल ही परिभ्रमण निर्माण करणाऱ्या प्रवृत्तीच्या संदर्भात असलेल्या शक्तीच्या मोजमापनासाठी एक परिचित यांत्रिक संज्ञा आहे.

४. कार्ल पिअरसनच्या असममिती गुणांकाचे सुत्र.

$$j_k = \frac{\overline{X} - Z}{\sigma}$$

५. वारंवारिता वक्राचा आकार सामान्य वक्रापेक्षा कमी उंचीचा आणि पसरट असणे म्हणजेच अल्पवशिंडता होय.

२.९ स्वाध्याय

१. पुढील सामग्रीच्या सहाय्याने कार्ल पिअरसनचा असममिती गुणांक काढा.

उंची (इंच)	58	59	60	61	62	63	64	65
व्यक्तीची संख्या	10	18	30	42	35	28	16	8

२. पुढील सामग्रीच्या सहाय्याने बाऊलेचा असममिती गुणांक काढा.

उंची (इंच)	57-58	58-59	59-60	60-61	61-62	62-63	63-64	64-65
व्यक्ती	11	19	31	44	37	30	18	10

३. पुढील माहितीच्या आधारे केले यांचा असममिती गुणांक काढा.

दैनंदिन खर्च (रू.)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
कुटुंब संख्या	13	25	27	19	16

४. पुढील माहितीचा वापर करून परिबलाच्या सहाय्याने असममिती गुणांक काढा.

गुण	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
वारंवारिता	2	12	22	24	16	12	8

५. पुढील माहितीचा वापर करून परिबलाच्या सहाय्याने वशिंडतेचे स्वरूप स्पष्ट करा.

X	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
f	8	28	35	17	12

६. थोडक्यात टिपा लिहा.

१) असममिती

२) असममितीच्या चाचण्या

३) परिबल

४) वशिंडता

५) असममितीचे मापण

२.१० संदर्भ

१. डॉ. वा. भा. पाटील (२००६), संशोधन पद्धती, प्रशांत पब्लिकेशन, जळगाव.

२. प्रा. राम देशमुख (२०११), मूलभूत सांख्यिकी, विद्या प्रकाशन, नागपूर.

३. डॉ. विश्वास कदम (२०१४). सांख्यिकी पद्धती, कैलास पब्लिकेशन, औरंगाबाद.

४. डॉ. प्रदिप आगलावे (२०००), संशोधन पद्धती, विद्या प्रकाशन, नागपूर.

५. Gupta, S.P. (2014), Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, New Delhi.

६. Elhance, Elhance, Aggarwal (2015), Fundamentals of Statistics, Kitab Mahal, New Delhi.

घटक ३

सहसंबंध विश्लेषण

(Correlation Analysis)

३.० उद्दिष्टे (Objectives)

विद्यार्थी मित्रहो या घटकाच्या अध्ययनानंतर आपणास -

- सहसंबंधाची संकल्पना स्पष्ट होईल.
- सहसंबंधाचे विविध प्रकाराचे ज्ञान होईल.
- सहसंबंध गुणांकाचे मापण करता येईल.
- निर्धारण गुणांक या संकल्पनेचा अर्थ समजून घेता येईल.

३.१ प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रहो आतापर्यंत आपण केंद्रीय प्रवृत्ती आणि परिमाणे, विचलन आणि त्याची परिमाणे, असममिती आणि त्याचे प्रकार व मापन तसेच वर्शिडता या संकल्पनाचा अभ्यास केला. केंद्रीय प्रवृत्तीच्या सहाय्याने आपणास समग्र सामग्रीचे किंवा आकडेवारीचे एक प्रतिनिधीक मूल्य मिळते. विचलनाच्या सहाय्याने आपणास दिलेली सामग्री ही त्याच्या माध्यापासून किती प्रमाणात विचलीत झाली आहे याची माहिती होते. असममितीच्या सहाय्याने आपणास वितरणाचा आकार कसा आहे व विवरण सममित आहे किंवा असममित आहे याची माहिती होते. वर्शिडतेच्या सहाय्याने आपणास विवरणाची उंची किंवा पसरटपणा माहिती होतो. वरील सर्व सांख्यिकीय तंत्रामध्ये एकाच चलाशी संबंधित विवेचन केले जाते. परंतु दोन किंवा दोनपेक्षा अधिक चल असतील तर त्यामध्ये कशा प्रकारचा संबंध आहे हे पाहण्यासाठी आपणास सहसंबंधाची संकल्पना उपयुक्त ठरते. प्रस्तुत घटकामध्ये आपण सहसंबंध या संकल्पनेविषयी विस्तृत माहिती मिळवणार आहोत.

३.२ सहसंबंध

३.२.१ सहसंबंध - अर्थ व संकल्पना

सहसंबंध म्हणजे दोन समुहातील संबंध होय. सांख्यिकीमध्ये सहसंबंधाचा वापर दोन चलामधील संबंधाचे मोजमाप करण्यासाठी केला जातो. त्यात एका चलाच्या मूल्यात बदल झाल्यास दुसऱ्या चलाच्या मूल्यात सुद्धा बदल होतो जर दोन मात्रामधील हालचाली अशा प्रकारे असतील जेथे एका मात्रेमध्ये हालचाल किंवा बदल झाला तर दुसऱ्या मात्रेमध्ये हालचाल किंवा बदल होतो तेव्हा त्या दोन मात्रा संबंधित असतात. उदाहरणार्थ पतीचे वय आणि पत्नीचे वय या मध्ये सहसंबंध

असतो. वस्तूची मागणी आणि किंमत यांच्यातील सहसंबंध, उत्पन्न आणि उपभोग यांच्यातील संबंध, एका विशिष्ट बिंदूपर्यंत होणारा पाऊस आणि भाताचे उत्पादन यांच्यातील संबंध, बचत आणि उपभोग यांच्यातील संबंध, उत्पन्न आणि उपभोग यांच्यातील संबंध, वस्तूची किंमत आणि पुरवठा यांच्यातील संबंध, दुरचित्रवाणी (टेलीव्हिजन) च्या परवाढ्यात होणारी वाढ आणि सिनेमा घरामध्ये होणारी घट यांच्यातील संबंध, मोबाईल मध्ये इंटरनेटचा वापर आणि सिनेमा गृहातील प्रेक्षकामध्ये झालेली घट यांच्यातील संबंध इत्यादी. सहसंबंध विश्लेषणाच्या सहाय्याने दोन घटकांमधील सहसंबंधाच्या श्रेणीचे मोजमाप करता येते. सहसंबंध गुणांक किंवा सहसंबंध निर्देशक हे सहसंबंधाचे मापक आहे ज्यामुळे सारांश रूपाने एक मूल्य मिळते जे घटकांची दिशा आणि श्रेणी दर्शविते. सहसंबंध तंत्राचा वापर दोन किंवा दोन पेक्षा अधिक घटक एकमेकांच्या किती जवळ आहेत किंवा त्यात कशा प्रकारे संबंध आहे याचे मापन करण्यासाठी केला जातो. सहसंबंध तंत्राच्या सहाय्याने निर्णय प्रक्रियेमध्ये निर्णय घेणाऱ्या व्यक्तीला मदत होते, कारण सहसंबंधाच्या सहाय्याने निर्णय घेणाऱ्या व्यक्तीला एका घटकाचा दुसऱ्या घटकाशी काय संबंध आहे याचे ज्ञान मिळविता येते आणि निर्णय प्रक्रियेतील अनिश्चितता कमी करता येते किंवा टाळता येते.

सहसंबंधाच्या व्याख्या अनेक थोर सांख्यिकीतज्ज्ञ, गणितीतज्ज्ञ, अर्थतज्ज्ञांनी केलेल्या आहेत. त्यापैकी महत्त्वाच्या व्याख्या पुढील प्रमाणे आहेत.

यालुन चाऊ यांच्या मते,

''सहसंबंध विश्लेषण दोन घटकांतील किंवा चलातील संबंधाच्या श्रेणीची निश्चिती करण्याचा प्रयत्न करते.''

डब्ल्यु आय किंग यांच्या मते,

''सहसंबंध म्हणजे माहितीच्या दोन श्रेणी किंवा समुहामध्ये किरकोळ संबंध प्रस्थापित करणे होय. जर असे संबंध सिद्ध झाले तर दोन चल एकाच दिशेने किंवा विरूद्ध दिशेने बदलतील आणि आपण असे मान्य करू की, तथ्य आणि सहसंबंध अस्तित्वात आला, अशा संबंधाला सहसंबंध असे म्हणतात.''

सिंपसन आणि काफका यांच्या मते,

''सहसंबंध विश्लेषण दोन किंवा दोन पेक्षा अधिक चलातील सहअस्तित्वाशी संबंधित असते.''

एल. आ. कॉनर यांच्या मते,

''जर दोन किंवा अधिक घटकामध्ये सहानुभूती असेल आणि एका चलात किंवा घटकात होणारी हालचाल दुसऱ्या घटकास बदलास प्रेरणा देत असेल त्या दोन किंवा अधिक घटकांमध्ये सहसंबंध आहे असे आपण म्हणू शकतो.''

ए. एम. टूटले यांच्या मते,

''सहसंबंध हे दोन किंवा अधिक चलातील सहविचरणाचे विश्लेषण आहे.''

म्हणजेच सहसंबंध हे एक सांख्यिकीय तंत्र असून जे दोन किंवा अधिक घटकातील सहविचरणाच्या विश्लेषणात मदत करते.

३.२.२ सहसंबंधाचे महत्त्व

ज्ञानाच्या विविध शाखामध्ये सहसंबंध तंत्राचे अनन्यसाधारण महत्त्व आहे. काही महत्त्वपूर्ण क्षेत्रामध्ये पुढीलप्रमाणे सहसंबंधाचा यशस्वी वापर केला जातो.

१) अनुवंशिकशास्त्र क्षेत्र

गॅल्टन आणि पिअरसन यांनी सहसंबंधाचे मूल्यमापन करण्याच्या पद्धती विकसित केल्या ज्याचा उपयोग जीवशास्त्र आणि अनुवंशिकशास्त्र या विषयातील विविध समस्यांचा अभ्यास करण्यासाठी केला जातो.

२) व्यवस्थापन क्षेत्र

व्यवस्थापनशास्त्र क्षेत्रातील मुख्य कार्य म्हणजे निर्णय घेणे होय. सहसंबंध हे सांख्यिकीय तंत्र व्यवस्थापकाला प्रबळ साधन देते ज्याचा उपयोग व्यवस्थापक निर्णय प्रक्रियेत करतात. त्यामधून व्यवस्थापनाच्या निर्णय प्रक्रियेतील अनिश्चितता कमी करतात.

३) अर्थशास्त्र क्षेत्र

अर्थशास्त्र क्षेत्रातील आर्थिक वर्तनाचा अभ्यास करण्यासाठी सहसंबंधाची मोठी उपयुक्तता आहे. सहसंबंधाच्या सहाय्याने कोणते चल कोणत्या चलावर विसंबित किंवा अवलंबून आहे याची निश्चिती होते. अशा पद्धतीने सहसंबंधाच्या सहाय्याने विविध आर्थिक घटकाचे विश्लेषण करता येते. याचबरोबर आर्थिक स्थितीचे विघटन करणाऱ्या घटकांचा शोध लावण्यासाठी सुद्धा सहसंबंधाचा उपयोग केला जातो.

४) सामाजिक शास्त्राच्या इतर शाखा

इतिहास, मानसशास्त्र, समाजशास्त्र, तत्त्वज्ञान, राज्यशास्त्र इ. सामाजिक शास्त्राच्या इतर शाखामध्ये विविध घटकातील किंवा चलामधील आंतरसंबंध निश्चित करण्यासाठी सहसंबंध विश्लेषण उपयोगी पडते आणि याचबरोबर संशोधनाला प्रेरणा आणि ज्ञानाच्या विविध शाखांची निर्मिती यासाठी सुद्धा सहसंबंधाचा उपयोग होतो.

अशाप्रकारे असे म्हटले जाते की, सहसंबंधाचे ज्ञानाच्या विविध नवनवीन शाखाची निर्मिती किंवा सुरूवात करणे आणि विविध शाखातील संशोधनाला प्रेरणा देणे यामध्ये अनन्यसाधारण महत्त्व आहे.

३.३ सहसंबंधाचे प्रकार

सहसंबंधाचे वर्गीकरण विविध मार्गाने किंवा प्रकारे केले जाते. त्यापैकी सहसंबंधाचे तीन महत्त्वाचे वर्गीकरण पुढीलप्रमाणे आहेत.

१) धनात्मक किंवा धन आणि ऋणात्मक किंवा ऋण सहसंबंध

२) साधा, अंशीक आणि बहु सहसंबंध

३) रेषीय आणि अरेषीय सहसंबंध

१. धनात्मक आणि ऋणात्मक सहसंबंध (Positive and Negative Correlation)

सहसंबंध हा धनात्मक (प्रत्यक्ष) किंवा ऋणात्मक (व्यस्त) आहे हे दोन घटकातील किंवा चलातील बदलाच्या दिशेवर अवलंबून असते.

१) धनात्मक किंवा धन सहसंबंध (Positive Correlation)

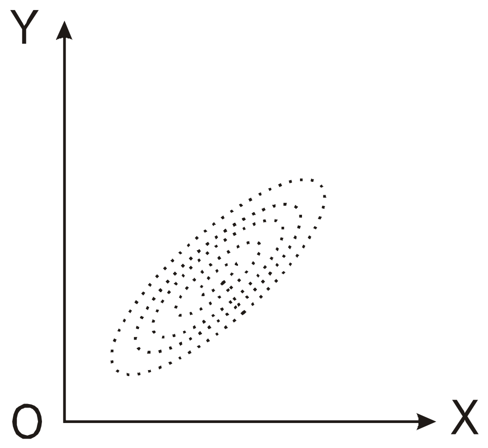
जर दोन्ही चल किंवा घटक एकाच दिशेने बदलत असतील म्हणजेच जर एका चलामध्ये वाढ झाली तर सामान्यपणे दुसऱ्या घटकामध्ये किंवा चलामध्ये सुद्धा वाढ होते किंवा जर एका चलामध्ये घट झाली तर सामान्यपणे दुसऱ्या चलामध्ये सुद्धा घट होते. तेव्हा अशा प्रकारच्या सहसंबंधास धनात्मक सहसंबंध असे म्हणतात. उदा. वस्तूची किंमत आणि वस्तूचा पुरवठा, उत्पन्न आणि उपभोग इ.

उदाहरण : a)

X	10	12	15	18	20
Y	15	20	22	25	37

b)

X	5	10	15	20	25
Y	3	6	9	12	15



२) ऋणात्मक किंवा ऋण सहसंबंध (Negative Correlation)

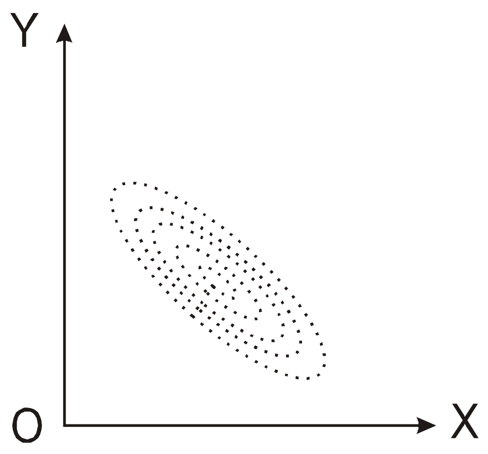
जर दोन्ही चल किंवा घटक विरूद्ध दिशेने बदलत असतील, म्हणजेच जर एका चलामध्ये वाढ झाली तर सामान्यपणे दुसऱ्या चलामध्ये घट होते किंवा जर एका चलामध्ये घट झाली तर सामान्यपणे दुसऱ्या चलामध्ये वाढ होते. तेव्हा अशा प्रकारच्या सहसंबंधास ऋणात्मक सहसंबंध असे म्हणतात. उदा. वस्तूची किंमत आणि वस्तूची मागणी, वेतन दर आणि बेरोजगारी दर.

उदाहरण : a)

X	10	20	30	40	50
Y	40	32	24	16	8

b)

X	100	90	60	40	30
Y	20	30	40	50	60



२. साधा, अंशीक आणि बहु सहसंबंध

(Simple, Partial and Multiple Correlation)

साधा, अंशीक आणि बहु सहसंबंध अशा प्रकारचे वर्गीकरण अभ्यासात घेतलेल्या घटकांच्या संख्येवरून केले जाते.

१) साधा सहसंबंध (Simple Correlation)

सहसंबंधाच्या अभ्यासासाठी फक्त दोनच घटक किंवा चल विचारात घेतले जातात तेंव्हा त्या सहसंबंधास साधा सहसंबंध असे म्हणतात.

उदाहरण : a)

X	1	2	3	4	5	6
Y	7	8	9	6	4	3

b)

X	2	3	7	5	3	1
Y	5	6	8	4	2	9

वस्तूची मागणी व किंमत यांच्यातील सहसंबंध, उत्पन्न व उपभोग यांच्यातील सहसंबंध अशी साध्या सहसंबंधाची उदाहरणे देता येतील ज्यात फक्त दोनच घटकांचा किंवा चलांचा विचार केला जातो.

२) अंशीक सहसंबंध (Partial Correlation)

अंशीक सहसंबंधामध्ये दोन पेक्षा जास्त घटकांचा किंवा चलांचा विचार केला जातो. परंतू त्यातील फक्त दोन चल सहसंबंध शोधण्यासाठी किंवा सहसंबंधाचा अभ्यास करण्यासाठी विचारात घेतले जातात आणि त्यांच्या आपसातील परिणामाचा विचार केला जातो त्याचवेळी इतर चल किंवा घटक हे स्थिर आहेत असे गृहीत धरले जाते.

उदाहरण : जेव्हा आपण प्रतिएकरी भाताचे उत्पादन, पावसाचे प्रमाण आणि वापरण्यात आलेल्या रासायनिक खताची मात्रा या तीन घटकांतील सहसंबंधाचा अभ्यास करतो तेव्हा आपण जर सहसंबंधाला मर्यादा घालून फक्त प्रतिएकरी भाताचे उत्पादन आणि पावसाचे प्रमाण या दोन चलाचा विचार करतो आणि रासायनिक खताची मात्रा स्थिर मानली जाते तर अशा प्रकारच्या सहसंबंधास अंशीक सहसंबंध असे म्हणतात.

३) बहु सहसंबंध (Multiple Correlation)

जेव्हा आपण दोन पेक्षा जास्त म्हणजेच तीन किंवा तीनपेक्षा जास्त चलाचा अभ्यास करतो तेव्हा त्या सहसंबंधास बहु सहसंबंध असे म्हणतात.

उदाहरण : जेव्हा आपण प्रतिएकरी भाताचे उत्पादन, पावसाचे प्रमाण आणि रासायनिक खताची मात्रा या तीन घटकांतील किंवा चलातील सहसंबंधाचा अभ्यास करतो तेव्हा त्या सहसंबंधास बहु सहसंबंध असे म्हणतात.

३. रेषीय आणि अरेषीय सहसंबंध (Linear and Non-linear Correlation)

रेषीय आणि अरेषीय सहसंबंधातील फरक हा चलातील किंवा घटकांतील बदलाच्या गुणोत्तरावरून केला जातो.

१) रेषीय सहसंबंध (Linear Correlation)

एका चलामध्ये किंवा घटकामध्ये स्थिर गुणोत्तराने होणाऱ्या बदलामुळे दुसऱ्या चलामध्ये किंवा घटकामध्ये स्थिर गुणोत्तराने जो बदल होतो तेव्हा त्या सहसंबंधास रेषीय सहसंबंध असे म्हणतात.

रेषीय सहसंबंधाचे दिशेवरून दोन प्रकार पडतात.

१) धनात्मक किंवा धन रेषीय सहसंबंध

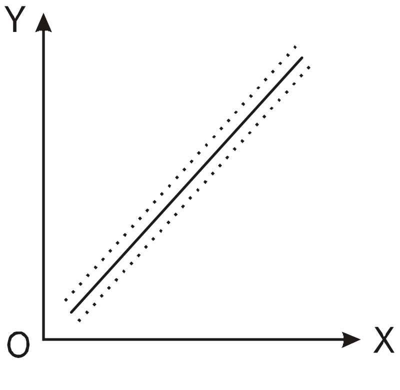
जेंव्हा विचारात घेतलेल्या दोन्ही चलामध्ये किंवा घटकामध्ये एकाच दिशेने आणि स्थिर गुणोत्तराने बदल होत असेल म्हणजेच जर एका चलामध्ये स्थिर गुणोत्तराने वाढ झाली तर दुसऱ्या चलामध्ये सुद्धा वाढ स्थिर. गुणोत्तराने होते किंवा जर एका चलामध्ये घट झाली तर दुसऱ्या चलामध्ये सुद्धा घट स्थिर गुणोत्तराने होते अशा सहसंबंधास धनात्मक किंवा धन रेषीय सहसंबंध असे म्हणतात.

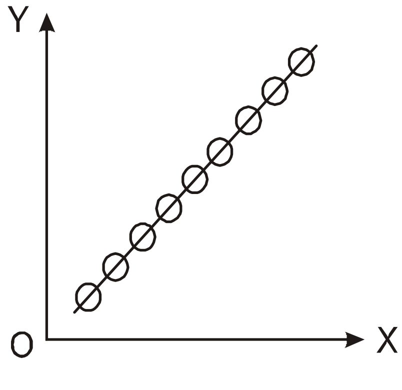
उदाहरण : a)

X	10	20	30	40	50
Y	70	140	210	280	350

b)

X	100	80	60	40	20
Y	150	120	90	60	30





२) ऋणात्मक किंवा ऋण धन रेषीय सहसंबंध

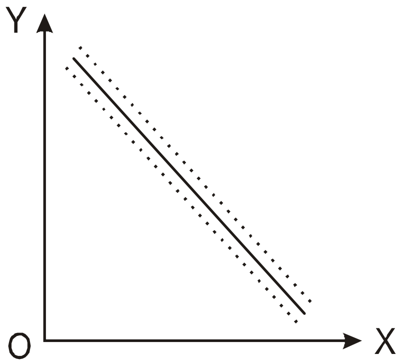
जेंव्हा विचारात घेतलेल्या दोन्ही चलामध्ये किंवा घटकामध्ये विरूद्ध दिशेने आणि स्थिर गुणोत्तराने बदल होत असेल म्हणजेच जर एका चलामध्ये स्थिर गुणोत्तराने वाढ झाली तर दुसऱ्या चलामध्ये स्थिर गुणोत्तराने घट होते किंवा जर एका चलामध्ये स्थिर गुणोत्तराने घट झाली तर दुसऱ्या चलामध्ये स्थिर गुणोतराने वाढ होते, अशा सहसंबंधास ऋणात्मक किंवा ऋण रेषीय सहसंबंध असे म्हणतात.

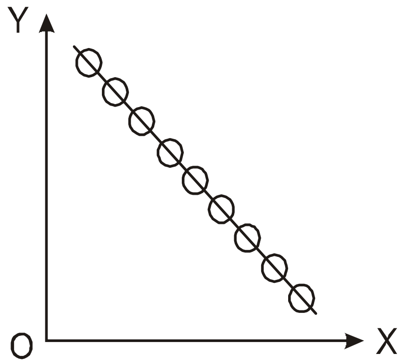
उदाहरण : a)

X	10	20	30	40	50
Y	300	240	180	120	60

b)

X	120	100	80	60	40	20
Y	30	60	90	120	150	180





२) अरेषीय सहसंबंध (Non-Linear Correlation)

जर एक चलाच्या किंवा घटकाच्या मूल्यामध्ये किंवा मात्रेमध्ये होणाऱ्या बदलामुळे दुसऱ्या चलामध्ये किंवा घटकाच्या मूल्यामध्ये किंवा मात्रेमध्ये सुद्धा बदल होतो पण हा बदल जर स्थिर गुणोत्तराने होत नसेल तर त्या सहसंबंधास अरेषीय सहसंबंध असे म्हणतात.

अरेषीय सहसंबंधाचे दोन प्रकार पडतात.

१) धनात्मक किंवा धन अरेषीय सहसंबंध

२) ऋणात्मक किंवा ऋण अरेषीय सहसंबंध

१) धनात्मक किंवा धन अरेषीय सहसंबंध

जेंव्हा विचारात घेतलेल्या दोन्ही चलामध्ये किंवा घटकामध्ये होणारा बदल समान दिशेने होत असेल परंतु स्थिर गुणोत्तराने होत नाही. म्हणजेच जर एका चलामध्ये वाढ झाली तर दुसऱ्या चलामध्ये सुद्धा वाढ होते किंवा जर एका चलामध्ये घट झाली तर दुसऱ्या चलामध्ये सुद्धा घट होते

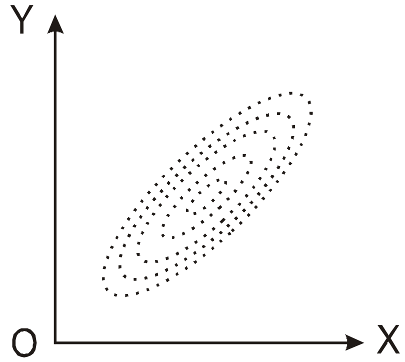
पण ती वाढ किंवा घट स्थिर गुणोत्तराने होत नाही तर त्या सहसंबंधास धनात्मक किंवा धन अरेषीय सहसंबंध असे म्हणतात.

उदाहरण : a)

X	2	3	5	6	8	9
Y	5	6	7	8	11	12

b)

X	12	8	5	3	2	1
Y	10	8	7	5	3	1



२) ऋणात्मक किंवा ऋण अरेषीय सहसंबंध

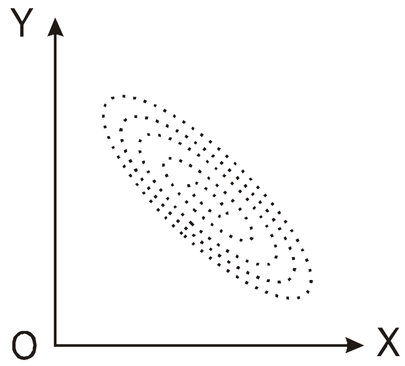
जेंव्हा विचारात घेतलेल्या दोन्ही चलामध्ये किंवा घटकामध्ये होणारा बदल विरूद्ध दिशेने असेल परंतु स्थिर गुणोत्तराने होत नाही म्हणजेच जर एका चलामध्ये वाढ झाली तर दुसऱ्या चलामध्ये घट होते किंवा जर एका चलामध्ये घट झाली तर दुसऱ्या चलामध्ये वाढ होते. पण ती घट किंवा वाढ स्थिर गुणोत्तराने होत नाही तेंव्हा अशा सहसंबंधास ऋणात्मक अरेषीय सहसंबंध असे म्हणतात.

उदाहरण : a)

X	9	8	6	5	2
Y	6	5	8	12	15

b)

X	2	5	9	13	18
Y	12	9	7	6	3



३.४ सहसंबंध अध्ययन पद्धती (Methods of Studying Correlation)

सहंध अध्ययनाच्या किंवा मोजमापनाच्या प्रमुख चार पद्धती आहेत त्या पुढील प्रमाणे आहेत.

१. विकीर्ण बिंदूलेख पद्धती.

२. आलेख पद्धती

३. कार्ल पिअरसनचा सहसंबंध गुणांक.

४. स्पिअरसनचा श्रेणी सहसंबंध गुणांक.

५. समवर्ती विचलन पद्धती.

३.४.१ विकीर्ण बिंदूलेख पद्धती (Scatter Diagram Method)

दोन चलातील किंवा घटकामधील सहसंबंध ओळखण्यासाठी साधी, सरळ आणि सोपी पद्धती म्हणजे बिंदू आलेख तयार करणे. या पद्धतीस विकीर्ण बिंदूलेख पद्धती असे म्हणतात. या पद्धतीस विकीर्ण बिंदूलेख पद्धती म्हणतात कारण हा आलेख विविध बिंदूचा विकीर्ण दर्शवते. या पद्धतीत दिलेल्या माहितीची आलेख पेपरवर बिंदूच्या रूपात आखणी केली जाते. म्हणजेच x आणि y या चलाच्या प्रत्येक जोडीचा एक बिंदू येतो आणि त्यावरून आपणास नमुन्यांची संख्या जेवढी आहे तेवढे बिंदू मिळतात. या विविध बिंदूच्या विकीर्णाकडे पाहिल्यानंतर आपणास दिलेल्या चलामध्ये काही सहसंबंध आहे किंवा नाही ते माहित होते. आलेखावर जेवढे मोठ्या प्रमाणात बिंदूचे विकीर्ण येतात तेवढा त्या दोन चलामधील सहसंबंध असतो.

जर सर्व बिंदू एका सरळ रेषेवर डावीकडून उजवीकडे वर चढत गेलेले दिसत असतील तर त्या दोन चलातील सहसंबंध हा पूर्ण धनात्मक म्हणजेच $r = +1$ असतो हे आकृती (१) मध्ये दर्शविले आहे.

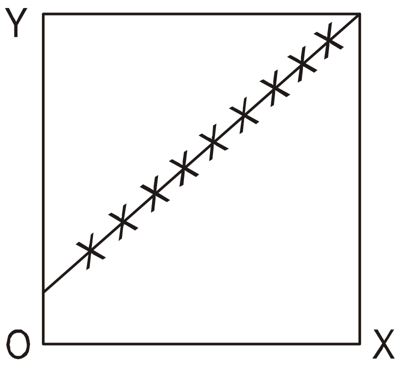
जर सर्व बिंदू एका सरळ रेषेवर डावीकडून उजवीकडे खाली उतरत गेलेले असतील तर त्या दोन चलातील सहसंबंध हा पूर्ण ऋणात्मक म्हणजेच $r = -1$ असतो हे आकृती (२) मध्ये दर्शविले आहे. जर काढलेले बिंदू एका छोट्या पट्टीमध्ये असतात जेथे चलामध्ये उच्च श्रेणीचा सहसंबंध असतो, जर त्या बिंदू मध्ये खालच्या डाव्या कोपऱ्यातून उजवीकडे वर जाणारी प्रवृत्ती असेल तर असा सहसंबंध धनात्मक असतो हे आकृती (३) मध्ये दर्शविले आहे.

जर काढलेले बिंदू एका छोट्या पट्टीमध्ये असतात जेथे चलामध्ये उच्च श्रेणीचा सहसंबंध असतो. जर त्या बिंदूमध्ये वरच्या डाव्या कोपऱ्यातून उजवीकडे खाली जाणारी प्रवृत्ती असेल तर असा सहसंबंध ऋणात्मक असतो हे आकृती (४) मध्ये दर्शविले आहे.

दुसऱ्या बाजूने बिंदू विकीर्ण पूर्ण आलेखभर विखुरलेले असतील तर दोन चलामध्ये खुप कमी सहसंबंध असतो. जर बिंदूची प्रवृत्ती डावीकडून उजवीकडे खालुन वर जाणारी असेल तर त्या चलामधील सहसंबंध धनात्मक असतो हे आकृती (५) मध्ये दर्शविले आहे. जर बिंदूची प्रवृत्ती डावीकडून उजवीकडे वरून खाली जाणारी असेल तर त्या चलामधील सहसंबंध ऋणात्मक असतो हे आकृती (६) मध्ये दर्शविले आहे.

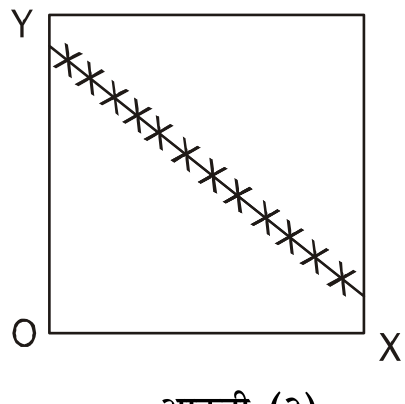
जर काढलेले बिंदू सरळ रेषेत x अक्षास समांतर असतील किंवा आकस्मिक स्वरूपात असतील तर चलामध्ये कुठलाही सहसंबंध नसतो. म्हणजेच $r = 0$ असतो हे आकृती (७) मध्ये दर्शविले आहे.

पूर्ण धन सहसंबंध ($r = +1$)



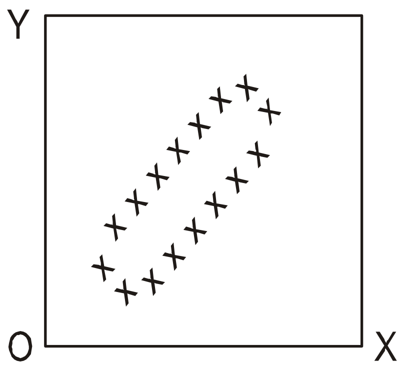
आकृती (१)

पूर्ण ऋण सहसंबंध ($r = -1$)



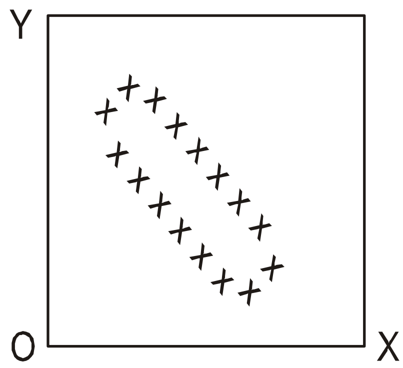
आकृती (२)

उच्च श्रेणीचा धनात्मक सहसंबंध



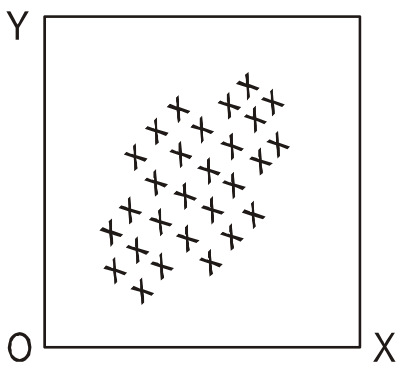
आकृती (३)

उच्च श्रेणीचा ऋणात्मक सहसंबंध



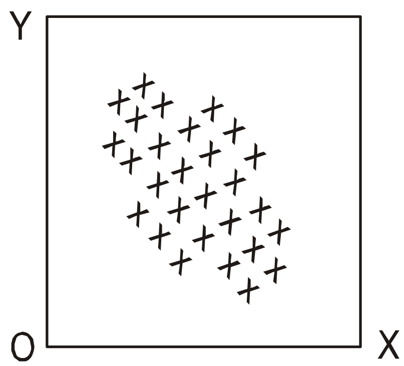
आकृती (४)

कमी श्रेणीचा धनात्मक सहसंबंध



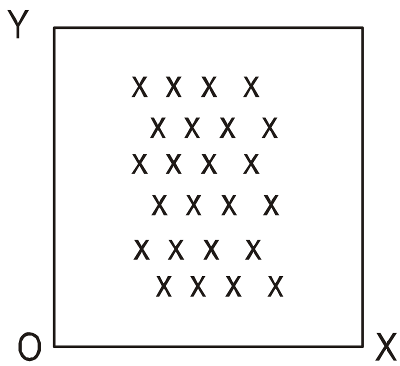
आकृती (५)

कमी श्रेणीचा ऋणात्मक सहसंबंध



आकृती (६)

शुन्य सहसंबंध



आकृती (७)

गुण :

१. विकीर्ण बिंदूलेख ही साधी अगणितीय पद्धती आहे.

२. विकीर्ण बिंदूलेख ही पद्धती समजण्यास सोपी आहे.

३. या पद्धतीत टोकांच्या घटकांचा परिणाम होत नाही.

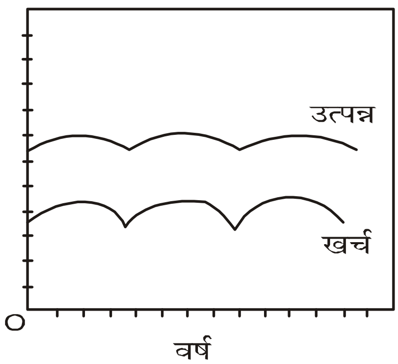
दोष :

१. सहसंबंधाचे वास्तव मोजमाप करता येत नाही.

२. या पद्धती वरून फक्त सहसंबंधाची दिशा माहित होते तर निश्चित मूल्य माहित होत नाही.

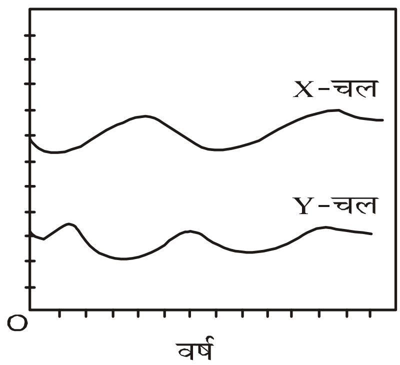
३.४.२ आलेख पद्धती (Graphic Method)

या पद्धतीत दोन चलाच्या व्यक्तीगत मूल्यांचा आलेख आलेख पेपरवर दोन वक्रासाठी काढावा लागतो त्यातील एक वक्र X चलासाठी आणि दुसरा Y चलासाठी असतो. त्यानंतर त्या दोन वक्राचे त्यांच्या हालचालीवरून निरिक्षण केल्यास आपल्याला त्या दोन चलामधील सहसंबंध मिळतो. उदाहणार्थ आकृती (A) हे दर्शविते की, X आणि Y चलाची हालचाल एकाच दिशेने आहे. जर एका वक्रामध्ये वाढ झाली तर दुसऱ्या वक्रामध्ये सुद्धा वाढ होते आणि एका वक्रामध्ये घट झाली तर दुसऱ्या वक्रामध्ये सुद्धा घट होते. आकृती (B) हे दर्शविते की, X आणि Y चलांच्या किंवा घटकांच्या हालचालीवरून कुठलीही निश्चित अशी दिशा मिळत नाही.



आकृती (A)

सहसंबंध अस्तित्वात आहे



आकृती (B)

सहसंबंध अस्तित्वात नाही

गुण :

१. आलेख पद्धती ही एक साधी अगणितीय पद्धती आहे.

२. आलेख पद्धती ही समजण्यासाठी सोपी आहे.

३. या पद्धतीत टोकांच्या मूल्यांचा परिणाम होत नाही.

दोष :

१. या पद्धतीत सहसंबंधाचे वास्तव मोजमाप करता येत नाही.

२. या पद्धतीवरून फक्त सहसंबंधाची दिशा माहित होते तर निश्चित मूल्य माहित होत नाही.

३.४.३ कार्ल पिअरसनचा सहसंबंध गुणांक

(Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

सहसंबंध मापनाच्या अनेक गणितीय पद्धतीपैकी एक कार्ल पिअरसनची पद्धती आहे. ही पद्धती पिअरसनचा सहसंबंध गुणांक या नावाने प्रसिद्ध आहे. कार्ल पिअरसनचा सहसंबंध गुणांक पुढील गृहीतावर आधारित आहे.

१. दोन चलामध्ये रेषीय संबंध आहे.

२. अभ्यासासाठी घेतलेले दोन चल सामान्य वितरण तयार करण्यासाठी मोठ्या संख्येने स्वतंत्र कारणाने प्रभावीत झालेले आहेत.

३. दोन श्रेणीच्या घटकाच्या वितरणावर परिणाम करणाऱ्या शक्तीमध्ये कारण आणि परिणाम संबंध आहे.

पिअरसनचा सहसंबंध गुणांक r या अक्षराने दर्शविला जातो. पिअरसनचा सहसंबंध गुणांक काढण्याचे सुत्र पुढीलप्रमाणे आहे.

$$r = \frac{\sum xy}{N\sigma_x\sigma_y}$$

सूत्रामध्ये, $x = (X - \overline{X})$ = X चलाच्या माध्यापासून घेतलेले विचलन

$y = (Y - \overline{Y})$ = Y चलाच्या माध्यापासून घेतलेले विचलन

σ_x = X श्रेणीचे प्रमाण विचलन

σ_y = Y श्रेणीचे प्रमाण विचलन

N = निरिक्षणाच्या जोड्यांची संख्या

r = सहसंबंध गुणांक

या पद्धतीचा वापर फक्त वास्तव माध्यापासून विचलन ($\overline{X}$ आणि $\overline{Y}$) घेतले असेल तरच उपयुक्त ठरते अन्यथा उपयुक्त ठरत नाही.

कार्ल पिअरसनचे सहसंबंध गुणांकाचे सुत्र पुढीलप्रमाणे लिहीता येईल.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{\text{N}}} \quad \text{आणि} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{\text{N}}}$$

$$r = \frac{\sum xy}{\text{N}\sqrt{\frac{\sum x^2}{\text{N}}}\sqrt{\frac{\sum y^2}{\text{N}}}}$$

$$= \frac{\sum xy}{\frac{\text{N}}{\text{N}}\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y^2}}$$

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y^2}}$$

येथे $x = (\text{X} - \overline{\text{X}})$ आणि $y = (\text{Y} - \overline{\text{Y}})$.

वरील सुत्राच्या सहाय्याने प्राप्त होणाऱ्या सहसंबंध गुणांकाचे मूल्य नेहमी +1 ते –1 च्या दरम्यान असते. जेव्हा r = +1 असते याचा अर्थ असा की, दिलेल्या दोन चलामध्ये पूर्ण धन सहसंबंध आहे. जेव्हा r = –1 असते याचा अर्थ असा की, दिलेल्या दोन चलामध्ये पूर्ण ऋण सहसंबंध आहे. जेव्हा r = 0 असते याचा अर्थ असा की, दिलेल्या दोन चलामध्ये कुठलाही सहसंबंध नाही. म्हणजेच शुन्य सहसंबंध आहे. प्रत्यक्षात r चे मूल्य +1, –1 व 0 असणे हे दुर्मिळ

असते. आपणास सामान्यपणे r चे मूल्य +1 आणि -1 च्या दरम्यान असलेले दिसते. उदा. + 0.85, – 0.39, + 0.27, – 0.91 इत्यादी. सहसंबंध गुणांक दोन चलातील सहसंबंधाचा केवळ आकार न दर्शविता दिशा पण दर्शवितो. म्हणून r = + 0.85 म्हणजे सहसंबंध धन आहे कारण r चे चिन्ह + आहे आणि आकार 0.85 आहे. अशाप्रकारे – 0.39 म्हणजे कमी श्रेणीचा ऋण सहसंबंध आहे.

सहसंबंध गुणांक मोजमापनातील टप्पे किंवा पायऱ्या

१. सर्वप्रथम X आणि Y श्रेणीचे माध्य काढावे म्हणजेच $\overline{X}$ आणि $\overline{Y}$.

२. X श्रेणीचे त्याचे माध्य $(\overline{X})$ पासून विचलन घ्यावे आणि त्यास x अक्षराने दर्शवावे म्हणजेच $x = (X - \overline{X})$.

३. या विचलनाचा वर्ग करून त्याची बेरीज प्राप्त करणे म्हणजेच $\sum x^2$.

४. Y या श्रेणीचे त्याचे माध्य $(\overline{Y})$ पासून विचलन घ्यावे आणि त्यास y अक्षराने दर्शवावे म्हणजेच $y = (Y - \overline{Y})$.

५. या विचलनाचा व करून त्याची बेरीज प्राप्त करणे म्हणजेच $\sum y^2$.

६. x आणि y या विचलनांचा गुणाकार करून बेरीज प्राप्त करणे म्हणजेच $\sum xy$.

७. $\sum xy$, $\sum x^2$ व $\sum y^2$ ही मूल्ये सहसंबंधाच्या सुत्रात ठेवून सोडवणे.

उदाहरण १ : खालील दिलेल्या माहितीच्या आधारे कार्ल पिअरसनचा सहसंबंध गुणांक काढा आणि त्या मूल्याचे ध्वनीतार्थ काढा.

हजेरी क्र.	1	2	3	4	5
अर्थशास्त्रातील गुण	49	36	18	24	48
सांख्यिकीतील गुण	47	22	42	27	47

उत्तर : समजा अर्थशास्त्रातील गुण = X आणि सांख्यिकीतील गुण = Y.

हजेरी क्रं.	X	Y	$x = (X - \overline{X})$	$y = (Y - \overline{Y})$	x^2	y^2	xy
1	49	47	14	10	196	100	140
2	36	22	1	– 15	1	225	– 15
3	18	42	– 17	5	289	25	– 85
4	24	27	– 11	– 10	121	100	110
5	48	47	13	10	169	100	130
	175	185	0	0	776	550	280

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{175}{5} = 35$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{185}{5} = 37$$

वरील तक्त्यावरून $\sum xy = 280$, $\sum x^2 = 776$ आणि $\sum y^2 = 550$

सुत्र $$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y^2}}$$

$$= \frac{280}{\sqrt{776}\sqrt{550}}$$

$$= \frac{280}{27.85 \times 23.45}$$

$$= \frac{280}{653.0825}$$

r = 0.42

$\therefore$ अर्थशास्त्र व सांख्यिकी या विषयातील गुण यामध्ये धन सहसंबंध आहे आणि सहसंबंध गुणांक 0.42 आहे.

उदाहरण २ : पती आणि पत्नीच्या 10 जोड्यांचे वय दिलेले आहे त्यावरून पती आणि पत्नी यांच्या वयातील सहसंबंध काढा.

पतीचे वय	62	64	65	65	66	67	68	70	61	62
पत्नीचे वय	65	66	63	66	70	70	67	69	67	57

उत्तर : समजा पतीचे वय (X) आणि पत्नीचे वय (Y).

X	Y	$x = (X - \overline{X})$	$y = (Y - \overline{Y})$	x^2	y^2	xy
62	65	– 3	– 1	9	1	3
64	66	– 1	0	1	0	0
65	63	0	– 3	0	9	0
65	66	0	0	0	0	0
66	70	1	4	1	16	4
67	70	2	4	4	16	8
68	67	3	1	9	1	3
70	69	5	3	25	9	15
61	67	– 4	1	16	1	– 4
62	57	– 3	– 9	9	81	27
650	660	0	0	74	134	56

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{650}{10} = 65$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{660}{10} = 66$$

सुत्र $$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y^2}}$$

$$= \frac{56}{\sqrt{74}\sqrt{134}}$$

$$= \frac{56}{8.60 \times 11.57}$$

$$= \frac{56}{99.502}$$

r = 0.56.

$\therefore$ पतीचे आणि पत्नीचे वय यांच्यामध्ये धन सहसंबंध आहे आणि सहसंबंध गुणांकाचे मूल्य r = 0.56 आहे.

सहसंबंध गुणांक काढण्याची प्रत्यक्ष पद्धती

सहसंबंध गुणांकाचे मोजमाप प्रत्यक्ष माध्या पासून विचलन न घेता सुद्धा करता येते. म्हणजेच X आणि Y चलाच्या मूळ मूल्यांवरून सहसंबंधाचे मोजमाप करता येते. या पद्धतीनुसार सहसंबंधाचे मोजमाप करण्याचे सुत्र पुढीलप्रमाणे आहे.

$$r = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \cdot \sum Y}{\mathrm{N}}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{\mathrm{N}}}\sqrt{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{\mathrm{N}}}}$$

$$r = \frac{\mathrm{N}\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\mathrm{N}\sum X^2 - (\sum X)^2}\sqrt{\mathrm{N}\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

सहसंबंध गुणांक मोजमापनातील टप्पे किंवा पायऱ्या

१. सर्वप्रथम X आणि Y च्या सर्व मूल्यांची बेरीज करावी म्हणजेच $\sum X$ आणि $\sum Y$ प्राप्त करावे.

२. X च्या सर्व मूल्यांचा वर्ग करून त्याची बेरीज करावी म्हणजेच $\sum X^2$ प्राप्त करावे.

३. Y च्या सर्व मूल्यांचा वर्ग करून त्याची बेरीज प्राप्त करावी म्हणजेच $\sum Y^2$ प्राप्त करावे.

४. X आणि Y च्या मूल्यांचा गुणाकार करून बेरीज प्राप्त करावी म्हणजेच $\sum XY$ प्राप्त करावे.

५. $\sum X$, $\sum Y$, $\sum X^2$, $\sum Y^2$, $\sum XY$ ही मूल्ये सुत्रामध्ये ठेवून सोडवावे.

उदाहरण : खालील माहितीच्या आधारे पिअरसनचा सहसंबंध गुणांक काढा.

खर्च	39	65	62	90	82	75	25	98	36	78
विक्री	47	53	58	86	62	68	60	91	51	84

उत्तर : समजा खर्च म्हणजे X आणि विक्री म्हणजे Y.

X	**Y**	X^2	Y^2	XY
39	47	1521	2209	1833
65	53	4225	2809	3445
62	58	3844	3364	3596
90	86	8100	7396	7740
82	62	6724	3844	5084
75	68	5625	4624	5100
25	60	625	3600	1500
98	91	9604	8281	8918
36	51	1296	2601	1836
78	84	6084	7056	6552
650	660	47648	45784	45604

वरील तक्त्यावरून

$\sum X = 650$, $\sum Y = 660$, $\sum X^2 = 47648$, $\sum Y^2 = 45784$ आणि $\sum XY = 45604$.

सुत्र
$$r = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \cdot \sum Y}{N}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}\sqrt{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}}}$$

$$= \frac{45604 - \frac{650 \times 660}{10}}{\sqrt{47648 - \frac{(650)^2}{10}}\sqrt{45784 - \frac{(660)^2}{10}}}$$

$$= \frac{45604 - \frac{429000}{10}}{\sqrt{47648 - \frac{422500}{10}}\sqrt{45784 - \frac{435600}{10}}}$$

$$= \frac{45604 - 42900}{\sqrt{47648 - 42250}\sqrt{45784 - 43560}}$$

$$= \frac{2704}{\sqrt{5398}\sqrt{2224}}$$

$$= \frac{2704}{73.47 \times 47.15}$$

$$= \frac{2704}{3464.11}$$

$r = 0.78.$

$\therefore$ खर्च आणि विक्री यांच्यामध्ये धनात्मक सहसंबंध असून सहसंबंध गुणांक 0.78 आहे.

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे सहसंबंध गुणांक काढा.

X	10	20	30	40	50	60	70
Y	30	50	60	80	85	90	95

उत्तर :

X	**Y**	X^2	Y^2	XY
10	30	100	900	300
20	50	400	2500	1000
30	60	900	3600	1800
40	80	1600	6400	3200
50	85	2500	7225	4250
60	90	3600	8100	5400
70	95	4900	9025	6650
280	490	1400	37750	22600

वरील तक्त्यावरून $\sum X = 280$, $\sum Y = 490$, $\sum X^2 = 14000$, $\sum Y^2 = 37750$, $\sum XY = 22600$

सुत्र
$$r = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{N\sum X^2 - (\sum X)^2}\sqrt{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

$$= \frac{7(22600) - (280)(490)}{\sqrt{7(1400) - (280)^2}\sqrt{7(37750) - (490)^2}}$$

$$= \frac{158200 - 137200}{\sqrt{98000 - 78400}\sqrt{264250 - 240100}}$$

$$= \frac{21000}{\sqrt{19600}\sqrt{24150}}$$

$$= \frac{21000}{140 \times 155.40}$$

$$= \frac{21000}{21756}$$

r = 0.96.

$\therefore$ X आणि Y या दोन चलामध्ये उच्च श्रेणीचा धनात्मक सहसंबंध आहे आणि सहसंबंध गुणांकाचे मूल्य 0.96 आहे.

गृहीत माध्यापासून विचलन घेऊन सहसंबंध मापन पद्धती

जेंव्हा प्रत्यक्ष माध्य हे दशांश अपूर्णांकात येतात. म्हणजेच, समजा X आणि Y या दोन श्रेणींचे प्रत्यक्ष माध्य अनुक्रमे 90.459 आणि 073.285 असेल तर प्रत्यक्ष पद्धतीने सहसंबंधाचे मापन केल्यास त्यात मोठ्या प्रमाणात आकडेमोड करावी लागते आणि त्यासाठी खुप वेळ खर्च करावा लागतो. असा परिस्थिती मध्ये सहसंबंध काढण्यासाठी गृहीत माध्य पद्धतीचा अवलंब केला जातो. जेंव्हा आपण गृहीत माध्यापासून विचलन घेतो तेंव्हा सहसंबंध मापनातच पुढील सुत्राचा उपयोग केला जातो.

सुत्र
$$r = \frac{\mathrm{N}\sum dXdY - \sum dX \sum dY}{\sqrt{\mathrm{N}\sum dX^2 - (\sum dX)^2}\sqrt{\mathrm{N}\sum dY^2 - (\sum dY)^2}}$$

किंवा

$$r = \frac{\sum dXdY - \frac{\sum dX \cdot \sum dY}{\mathrm{N}}}{\sqrt{\sum dX^2 - \frac{(\sum dX)^2}{\mathrm{N}}}\sqrt{\sum dY^2 - \frac{(\sum dY)^2}{\mathrm{N}}}}$$

येथे dX याचा अर्थ असा की, X श्रेणीचे गृहीत मध्यापासून घेतलेले विचलन, म्हणजेच $X - X^*$ किंवा $X - A_X$ येथे X^* किंवा A_X गृहीत माध्य आहे आणि dY याचा अर्थ असा की, Y श्रेणीचे गृहीत मध्यापासून घेतलेले विचलन, म्हणजेच $Y - Y^*$ किंवा $Y - A_Y$ येथे Y^* किंवा A_Y गृहीत माध्य आहे.

$\sum dX$ = X श्रेणीचे गृहीत माध्यापासून घेतलेल्या विचलनाची बेरीज.

$\sum dY$ = Y श्रेणीचे गृहीत माध्यापासून घेतलेल्या विचलनाची बेरीज.

$\sum dX^2$ = X श्रेणीचे गृहीत माध्यापासून घेतलेल्या विचलनाच्या वर्गाची बेरीज.

$\sum dY^2$ = Y श्रेणीचे गृहीत माध्यापासून घेतलेल्या विचलनाच्या वर्गाची बेरीज.

$\sum dXdY$ = X आणि Y श्रेणीच्या गृहीत माध्यापासून घेतलेल्या विचलनाच्या गुणाकाराची गुणाकाराची बेरीज

गृहीत माध्य पद्धतीतील टप्पे

१. X श्रेणीचे गृहीत माध्यापासून विचलन घ्या आणि त्यास dX ने दर्शवा आणि सर्व विचलनाची बेरीज प्राप्त करा. म्हणजेच $\sum dX$.

२. Y श्रेणीचे गृहीत माध्यापासून विचलन घ्या आणि त्यास dY ने दर्शवा आणि सर्व विचलनाची बेरीज प्राप्त करा, म्हणजेच $\sum dY$.

३. dX चा वर्ग करा म्हणजेच dX^2 आणि बेरीज प्राप्त करा, म्हणजेच $\sum dX^2$.

४. dY चा वर्ग करा म्हणजेच dY^2 आणि बेरीज प्राप्त करा, म्हणजेच $\sum dY^2$.

५. dX आणि dY चा गुणाकार करा आणि त्याची बेरीज प्राप्त करा, म्हणजेच $\sum dXdY$.

६. $\sum dX$, $\sum dY$, $\sum dX^2$, $\sum dY^2$ आणि $\sum dXdY$ यांची मूल्ये सुत्रामध्ये ठेवा.

$$r = \frac{\sum dXdY - \frac{\sum dX \cdot \sum dY}{N}}{\sqrt{\sum dX^2 - \frac{(\sum dX)^2}{N}}\sqrt{\sum dY^2 - \frac{(\sum dY)^2}{N}}}$$

उदाहरण : वापरण्यात आलेले भांडवल आणि प्राप्त केलेला नफा यांच्या माहितीच्या आधारे सहसंबंध गुणांक काढा. त्यासाठी 69 आणि 112 ही मूल्ये अनुक्रमे भांडवल आणि नफा यासाठी गृहीत माध्य म्हणून वापर करा.

भांडवल	78	89	99	66	59	60	79	68	61	71
नफा	125	137	156	107	115	112	136	120	123	108

उत्तर : समजा भांडवल म्हणजे X आणि नफा म्हणजे Y.

X	Y	dX	dY	dX^2	dY^2	$dXdY$
78	125	9	13	81	169	117
89	137	20	25	400	625	500
99	156	30	44	900	1936	1320
66	107	– 3	– 5	9	25	15
59	115	– 10	3	100	9	– 30
60	112	– 9	0	81	0	0
79	136	10	24	100	576	240
68	120	– 1	8	1	64	– 8
61	123	– 8	11	64	121	– 88
71	108	2	– 4	4	16	– 8
730	1239	40	119	1740	3541	2058

वरील तक्त्यावरून

$\sum dX = 40$, $\sum dY = 119$, $\sum X^2 = 1740$, $\sum Y^2 = 3541$ आणि $\sum dXdY = 2058$.

सुत्र $$r = \frac{\sum dXdY - \frac{\sum dX \cdot \sum dY}{N}}{\sqrt{\sum dX^2 - \frac{(\sum dX)^2}{N}}\sqrt{\sum dY^2 - \frac{(\sum dY)^2}{N}}}$$

$$= \frac{2058 - \frac{40 \times 119}{10}}{\sqrt{1740 - \frac{(40)^2}{10}}\sqrt{3541 - \frac{(119)^2}{10}}}$$

$$= \frac{2058 - \frac{4760}{10}}{\sqrt{1740 - \frac{1600}{10}}\sqrt{3541 - \frac{14161}{10}}}$$

$$= \frac{2058 - 476}{\sqrt{1740 - 160}\sqrt{3541 - 1416.1}}$$

$$= \frac{1582}{\sqrt{1580}\sqrt{2124.9}}$$

$$= \frac{1582}{39.74 \times 46.09}$$

$$= \frac{1582}{1831.61}$$

r = 0.86.

$\therefore$ भांडवल व नफा यांच्यामध्ये उच्च श्रेणीचा धनात्मक सहसंबंध आहे आणि सहसंबंध गुणांक 0.86 आहे.

उदाहरण : अर्थशास्त्र (X) आणि वाणिज्य (Y) विषयातील गुण पुढीलप्रमाणे आहेत. त्यावरून सहसंबंध गुणांक काढा.

X	50	60	58	47	49	33	65	43	46	68
Y	48	65	50	48	55	58	63	48	50	70

उत्तर :

X	Y	*dX*	*dY*	dX^2	dY^2	*dXdY*
50	48	0	– 10	0	100	0
60	65	10	– 7	100	49	70
58	50	8	– 8	64	64	– 64
47	48	– 3	– 10	9	100	30
49	55	– 1	– 3	1	9	3
33	58	– 17	0	289	0	0
65	63	15	5	225	25	75
43	50	– 4	– 8	16	64	32
46	50	– 4	– 8	16	64	32
68	70	18	12	324	144	216
519	555	19	25	1077	655	432

वरील तक्त्यावरून

$\sum dX = 19$, $\sum dY = -25$, $\sum dX^2 = 1077$, $\sum dY^2 = 655$, $\sum dXdY = 432$.

सुत्र $$r = \frac{\sum dXdY - \dfrac{\sum dX \cdot \sum dY}{N}}{\sqrt{\sum dX^2 - \dfrac{(\sum dX)^2}{N}}\sqrt{\sum dY^2 - \dfrac{(\sum dY)^2}{N}}}$$

$$= \frac{432 - \dfrac{(19)(-25)}{10}}{\sqrt{1077 - \dfrac{(19)^2}{10}}\sqrt{655 - \dfrac{(-25)^2}{10}}}$$

$$= \frac{432 + \frac{475}{10}}{\sqrt{1077 - \frac{361}{10}}\sqrt{655 - \frac{625}{10}}}$$

$$= \frac{432 + 47.5}{\sqrt{1077 - 36.1}\sqrt{655 - 62.5}}$$

$$= \frac{479.5}{\sqrt{1040.9}\sqrt{592.5}}$$

$$= \frac{479.5}{32.26 \times 24.34}$$

$$= \frac{479.5}{785.21}$$

r = 0.61.

$\therefore$ अर्थशास्त्र आणि वाणिज्य विषयात मध्यम धन सहसंबंध आहे आणि सहसंबंध गुणांक 0.61 आहे.

सहसंबंध गुणांकाचे गुणधर्म

सहसंबंध गुणांकाचे महत्त्वाचे गुणधर्म पुढील प्रमाणे आहेत.

१. सहसंबंध गुणांकाचे मूल्य – 1 आणि + 1 च्या दरम्यान असते $-1 \le r \le +1$ म्हणजेच किंवा $|r| \le 1$.

२. सहसंबंध गुणांक X आणि Y चलाची पातळी आणि आरंभ याच्याशी स्वतंत्र असते.

३. सहसंबंध गुणांक दोन समाश्रयण किंवा प्रतिगमन गुणांक यांचे भौमितीक माध्य असते. म्हणजेच $r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$.

४. दोन चलातील संबंधाचे मान किंवा श्रेणी ही पुढील प्रमाणे समरूप असते.

$$r_{xy} = r_{yx}$$

$$r_{xy} = \frac{\sum xy}{N\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum xy}{N\sigma_x \sigma_y} = r_{yx}$$

गुण :

१. या पद्धतीनुसार सहसंबंध काढणे सोपे आहे.

२. या पद्धतीमध्ये एकच आकडा किंवा मूल्य सहसंबंधाची दिशा आणि मान किंवा श्रेणी दर्शविते.

दोष :

१. हि पद्धती अनेक असाधारण गृहीतावर आधारीत आहे.

२. या पद्धतीत सहसंबंधावर टोकाच्या मूल्यांचा परिणाम होतो.

३. या पद्धतीनुसार चुकीचे अनुमान काढणे सहज शक्य आहे.

३.४.४ स्पिअरसनचा श्रेणी सहसंबंध गुणांक

(Spearman's Rank Coefficient of Correlation)

सहसंबंध मापनाची कार्ल पिअरसनची पद्धती ही अभ्यासासाठी विचारात घेतलेली समष्टी ही सामान्यपणे वितरीत झालेली असते. या गृहीतावर आधारीत आहे. परंतु जेव्हा समष्टी ही सामान्यपणे वितरीत नसते किंवा वितरणाचा आकार माहित नसतो अशावेळी आपणास अशा सहसंबंध मापकाची गरज पडते ज्यात समष्टीबाबत कुठलेही गृहीत धरलेले नाही. अशा परिस्थितीत चार्ल्स इ. स्पिरअरसन यांनी १९०४ मध्ये विकसित केलेल्या श्रेणी सहसंबंध गुणांकाचा वापर केला पाहिजे. स्पिअरसनची ही पद्धती विशेषत: अशावेळी उपयुक्त ठरते जेव्हा एखाद्या घटकाचे संख्यात्मक मापन (उदा. नेतृत्व क्षमतेचे मूल्यमापन किंवा स्त्रीच्या सौंदर्याविषयी निर्णय देणे) निश्चित नसते, परंतु व्यक्तीगतरित्या एखाद्या समुहामध्ये मांडलेल्या असतात. ज्यामुळे प्रत्येक व्यक्तीला एक विशेष अंक दिलेला असतो त्यामुळे त्या व्यक्तीची समुहातील श्रेणी माहित होते.

स्पिअरसनच्या श्रेणी सहसंबंधाची व्याख्या पुढीलप्रमाणे सुत्राच्या सहाय्याने करता येईल.

$$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

किंवा $R = 1 - = \frac{6\sum D^2}{N^3 - 1}$

येथे, R - श्रेणी सहसंबंध गुणांक

D - दोन घटकाच्या जोड्याच्या श्रेणीतील फरक

N - समष्टीतील अवलोकनांची संख्या

स्पिअरसनच्या श्रेणी सहसंबंध गुणांकाची वैशिष्ट्ये

१. दोन चलाच्या किंवा घटकांच्या श्रेणीतील फरकाची बेरीज शुन्य असते. सुत्रामध्ये $\sum D = 0$.

२. श्रेणी सहसंबंध गुणांक हा वितरण मुक्त किंवा अप्रचलीय आहे कारण या पद्धतीत समष्टी निर्मिती संदर्भात कुठलेही ठोस गृहीत केलेले नाही ज्यामधून नमुन्याची निवड करावयाची असते.

३. श्रेणी सहसंबंध गुणांक पद्धतीतून मिळणाऱ्या निष्कर्षाचे ध्वनीतार्थ कार्ल पिअरसनच्या सहसंबंध गुणांकाप्रमाणेच काढता येतात.

श्रेणी सहसंबंध गुणाांकामध्ये दोन प्रकारचे प्रश्न आहेत.

१) श्रेणी दिलेली असताना.

२) श्रेणी दिलेली नसताना.

१) श्रेणी दिलेली असताना

जर आपणास प्रत्यक्ष श्रेणी दिलेल्या असतात. त्यावेळी श्रेणी सहसंबंध गुणांकाच्या मोजमापनातील पायऱ्या पुढील प्रमाणे आहेत.

१. सर्वप्रथम दोन्ही श्रेणीमधील फरक काढा म्हणजेच (R_1 – R_2) आणि तो फरक D या अक्षराने दर्शवा.

२. $R_1 - R_2 = D$ या फरकाचा वर्ग प्राप्त करा म्हणजेच D^2 आणि त्याची एकुण बेरीज प्राप्त करा $\sum D^2$.

३. सुत्राचा उपयोग करून श्रेणी सहसंबंध गुणांक काढा.

$$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N-1)} = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^3 - 1}$$

उदाहरण : A आणि B या दोन विषयातील 10 विद्यार्थ्यांची श्रेणी पुढील प्रमाणे आहे. त्यावरून श्रेणी सहसंबंध गुणांक काढा.

A	6	5	3	10	2	4	9	7	8	1
B	3	8	4	9	1	6	10	7	5	2

उत्तर :

A विषयाची श्रेणी R_1	**B विषयाची श्रेणी R_2**	**D = (R_1 – R_2)**	**D^2**
6	3	3	9
5	8	– 3	9
3	4	– 1	1
10	9	1	1
2	1	1	1
4	6	– 2	4
9	10	– 1	1
7	7	0	0
8	5	3	9
1	2	– 1	1
			$\sum D^2 = 36$

वरील तक्त्यावरून $\sum D^2 = 36$ आणि N = 10.

सुत्र $$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6(36)}{10((10)^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{216}{10(100 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{216}{10(99)}$$

$$= 1 - \frac{216}{990}$$

= 0 – 0.21

R = 0.79.

$\therefore$ A आणि B या दोन विषयातील श्रेणीचा सहसंबंध गुणांक 0.79 आहे.

उदाहरण : लेखाशास्त्र आणि अर्थशास्त्र या विषयातील 10 विद्यार्थ्यांची श्रेणी दिलेली आहे त्यावरून श्रेणी सहसंबंध गुणांक काढा.

लेखाशास्त्र	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
अर्थशास्त्र	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

उत्तर : समजा R_1 ही लेखाशास्त्राची श्रेणी आण R_2 ही अर्थशास्त्राची श्रेणी आहे.

R_1	R_2	$D = R_1 - R_2$	D_2
3	6	– 3	9
5	4	1	1
8	9	– 1	1
4	8	– 4	16
7	1	6	36
10	2	8	64
2	3	– 1	1
1	10	– 9	81
6	5	1	1
9	7	2	4
			214

वरील तक्त्यावरून $\sum D^2 = 214$ आणि N = 10.

सुत्र $$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$$

$$R = 1 - \frac{6(214)}{10(10^2-1)}$$

$$R = 1 - \frac{1284}{10(100-1)}$$

$$R = 1 - \frac{1284}{10(99)}$$

$$R = 1 - \frac{1284}{990}$$

$$= 1 - 1.29$$

$$R = -0.29.$$

$\therefore$ लेखाशास्त्र आणि अर्थशास्त्र या दोन विषयात कमी श्रेणीचा ऋणात्मक सहसंबंध आहे जो – 0.29 आहे.

२) श्रेणी दिलेली नसताना

जेंव्हा आपणास श्रेणी ऐवजी प्रत्यक्ष माहिती दिलेली असते तेव्हा सर्वप्रथम दिलेल्या आकडेवारीला श्रेणी देणे आवश्यक आहे. श्रेणी देताना एकतर सर्वात मोठ्या मूल्यापासून किंवा सर्वात छोट्या मूल्यापासून सुरूवात केली पाहिजे. परंतु जेव्हा आपण छोट्या मूल्यापासून किंवा मोठ्या मूल्यापासून सुरूवात करतो तेव्हा दोन्ही चलासाठी समान पद्धती वापरली पाहिजे.

जर प्रत्यक्ष श्रेणी दिलेली नसेल तर तेव्हा श्रेणी सहसंबंध गुणांक काढण्याच्या पद्धतीतील पायऱ्या पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. प्रत्येक चलाला सर्वात मोठे मूल्य किंवा सर्वात छोटे मूल्य प्रथम घेऊन श्रेणी द्यावी त्यामध्ये पहिल्या चलाला R_1 आणि दुसऱ्या चलाला R_2 ने दर्शवावे.

२. दोन श्रेणीतील फरक काढावा म्हणजेच $R_1 - R_2$ आणि त्यास D या अक्षराने दर्शवावे.

३. D चा वर्ग करा आणि त्याची एकुण बेरीज प्राप्त करा. म्हणजेच $\sum D^2$.

४. सुत्राचा उपयोग करून श्रेणी सहसंबंध गुणांक काढा.

$$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^2 - N} = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

उदाहरण : X आणि Y या पंचानी एका स्पर्धात्मक परिक्षेत 10 विद्यार्थ्यांना पुढील प्रमाणे गुण दिलेले आहेत. त्या दोन पंचानी दिलेल्या गुणातील श्रेणी सहसंबंध गुणांक काढा.

अनुक्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X पंचाचे गुण	52	53	42	60	45	41	37	38	25	27
Y पंचाचे गुण	65	68	43	38	77	48	65	30	25	50

उत्तर :

X	R_1	Y	R_2	D	D^2
52	8	65	8	0	0
53	9	68	9	0	0
42	6	43	5	1	1
60	10	38	4	6	36
45	7	77	10	– 3	9
41	5	48	6	– 1	1
37	3	35	3	0	0
38	4	30	2	2	4
25	1	25	1	0	0
27	2	50	7	– 5	25
					76

वरील तक्त्यावरून $\sum D^2 = 76$ आणि N = 10.

सुत्र $$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$$

$$R = 1 - \frac{6(76)}{10(10^2-1)}$$

$$R = 1 - \frac{456}{10(100-1)}$$

$$R = 1 - \frac{456}{10(99)}$$

$$R = 1 - \frac{456}{990}$$

R = 1 – 0.46

R = 0.54.

$\therefore$ X आणि Y या दोन पंचानी दिलेल्या गुणामध्ये धनात्मक सहसंबंध आहे जो 0.54 असा आहे.

उदाहरण : विद्यार्थ्यांनी वाणिज्या (X) आणि अर्थशास्त्र (Y) या दोन विषयातील प्राप्त केलेले गुण पुढीलप्रमाणे आहेत, त्यावरून श्रेणी सहसंबंध गुणांक काढा.

X	50	60	58	47	49	33	65	43	46	68
Y	48	65	52	45	55	58	63	42	50	70

उत्तर :

X	R_1	Y	R_2	D	D^2
50	6	48	3	3	9
60	8	65	9	– 1	1
58	7	52	5	2	4
47	4	45	2	2	4
49	5	55	6	– 1	1
33	1	58	7	– 6	36
65	9	63	8	1	1
43	2	42	1	1	1
46	3	50	4	– 1	1
68	10	70	10	0	0
					58

वरील तक्त्यावरून $\sum D^2 = 58$, N = 10.

सुत्र $$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$R = 1 - \frac{6(58)}{10(10^2 - 1)}$$

$$R = 1 - \frac{348}{10(100 - 1)}$$

$$R = 1 - \frac{348}{10(99)}$$

$$R = 1 - \frac{348}{990}$$

R = 1 – 0.35

R = 0.65.

$\therefore$ विद्यार्थ्यांनी प्राप्त केलेल्या वाणिज्य आणि अर्थशास्त्र विषयातील गुणामध्ये धनात्मक सहसंबंध आहे, जो 0.65 आहे.

समान श्रेणी :

काही वेळा दोन किंवा अधिक व्यक्तीला किंवा घटकांना समान मूल्य असल्यामुळे समान श्रेणी देणे आवश्यक असते. अशावेळेस प्रत्येक व्यक्तीस किंवा घटकास सरासरी श्रेणी दिली पाहिजे. म्हणून समजा जर दोन व्यक्तीस किंवा घटकांस तिसरे स्थान दिले तर प्रत्येकाला $\frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$ अशी सरासरी असतील तर त्यांना $\frac{6+7+8}{3} = \frac{21}{3} = 7$ अशी सरासरी श्रेणी दिली पाहिजे. जेंव्हा काही घटकांना सारखी श्रेणी दिली तर श्रेणी सहसंबंध गुणांकाच्या सुत्रामध्ये काही प्रमाणात समायोजन

करावे लागेल. या समायोजनात $\sum D^2$ मध्ये $\frac{1}{12}(m^3 - m)$ मिळविले पाहिजे येथे m म्हणजे समान श्रेणी असणाऱ्या घटकांची संख्या होय. जर असे समान श्रेणी असणारे घटकांचे समुह एकापेक्षा जास्त असतील तर $\frac{1}{12}(m^3 - m)$ हे मूल्य जेवढे समुह समान श्रेणी असणारे आहेत तितक्या वेळा मिळविले पाहिजे. यावरून श्रेणी सहसंबंध गुणांकाचे सुधारीत सुत्र पुढील प्रमाणे आहे.

$$R = 1 - \frac{6\left\{\sum D^2 + \frac{1}{12}\left(m_1^3 - m_1\right) + \frac{1}{12}\left(m_2^3 - m_2\right) + \ldots\ldots\right\}}{N\left(N^2 - 1\right)}$$

उदाहरण : X आणि Y चलाच्या निरिक्षणाच्या मूल्यांच्या जोड्यांच्या सहाय्याने श्रेणी सहसंबंध गुणांक काढा.

X	50	55	65	50	55	60	50	65	70	75
Y	110	110	115	125	140	115	130	120	115	160

उत्तर :

X	R_1	Y	R_2	D	D^2
50	110	2	1.5	0.5	0.25
55	110	4.5	1.5	3.0	9.00
65	115	7.5	4	3.5	12.25
50	125	2	7	– 5.0	25.00
55	140	4.5	9	– 4.5	20.25
60	115	6	4	2.0	4.00
50	130	2	8	– 6.0	36.00
65	120	7.5	6	1.5	2.25
70	115	9	4	5.0	25.00
75	160	10	10	0	0.00
					134.00

वरील तक्त्यावरून $\sum D^2 = 134.00$, N = 10.

वरील X या श्रृंखलेमध्ये 50 हा अंक तीन वेळा, 55 हा अंक दोन वेळा, आणि 65 हा अंक दोन वेळा आलेला आहे. तसेच Y या श्रृंखलेमध्ये 110 हा अंक दोन वेळा आणि 115 हा अंक VrZ db mA rb b mA rho åhUÿ $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 2$, $m_4 = 2$, $m_5 = 3$.

सुत्र

$$R = 1 - \frac{6\left\{\sum D^2 + \frac{1}{12}\left(m_1^3 - m_1\right) + \frac{1}{12}\left(m_2^3 - m_2\right) + \frac{1}{12}\left(m_3^3 - m_3\right) + \frac{1}{12}\left(m_4^3 - m_4\right) + \frac{1}{12}\left(m_5^3 - m_5\right)\right\}}{N\left(N^2 - 1\right)}$$

$$R = 1 - \frac{6\left\{134 + \frac{1}{12}\left(3^3 - 3\right) + \frac{1}{12}\left(2^3 - 2\right) + \frac{1}{12}\left(2^3 - 2\right) + \frac{1}{12}\left(2^3 - 2\right) + \frac{1}{12}\left(3^3 - 3\right)\right\}}{10\left(10^2 - 1\right)}$$

$$R = 1 - \frac{6\left\{134 + \frac{1}{12}(27 - 3) + \frac{1}{12}(8 - 2) + \frac{1}{12}(8 - 2) + \frac{1}{12}(8 - 2) + \frac{1}{12}(27 - 3)\right\}}{10(100 - 1)}$$

$$R = 1 - \frac{6\left\{134 + \frac{24}{12} + \frac{6}{12} + \frac{6}{12} + \frac{6}{12} + \frac{24}{12}\right\}}{10(99)}$$

$$R = 1 - \frac{6\{134 + 2 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 2\}}{990}$$

$$R = 1 - \frac{6\{139.5\}}{990}$$

$$R = 1 - \frac{837}{990}$$

R = 1 – 0.84

R = 0.16.

$\therefore$ X आणि Y या दोन चलामध्ये निम्न श्रेणीचा धनात्मक सहसंबंध आहे.

श्रेणी सहसंबंध गुणांक पद्धतीचे गुण-दोष

गुण :

१. श्रेणी सहसंबंध गुणांक पद्धती ही कार्ल पिअरसन पद्धती पेक्षा समजण्यास आणि वापरण्यास सोपी आहे.

२. जेंव्हा माहिती ही गुणात्मक स्वरूपाची असते उदा. प्रामाणिकपणा, कार्यक्षमता, बुद्धीमत्ता इ. तेव्हा श्रेणी सहसंबंध गुणांक पद्धती वापरणे फायदेशीर ठरते.

३. प्रत्यक्ष माहिती दिलेली नसेल आणि फक्त श्रेणी दिलेली असेल तर फक्त श्रेणी सहसंबंध गुणांक पद्धतीचाच वापर करता येतो.

४. प्रत्यक्ष माहिती दिलेली असताना सुद्धा या पद्धतीचा वापर करून सहसंबंध काढता येतो.

दोष किंवा मर्यादा :

१. जेंव्हा माहिती ही समुह वारंवारिता वितरीत असेल तर तेव्हा सहसंबंध गुणांक काढण्यासाठी या पद्धतीचा उपयोग करता येत नाही.

२. जेंव्हा घटकांच्या मूल्यांची संख्या ३० पेक्षा जास्त असते तेंव्हा करावी लागणारी आकडेमोड हि खुप कंटाळवाणी आणि वेळखाऊ असते.

श्रेणी सहसंबंध गुणांकाचा वापर केंव्हा करायला पाहिजे ?

१. जेंव्हा सुरूवातीची माहिती ही श्रेणी स्वरूपात असेल.

२. जर निरिक्षणांची संख्या (N) न्याय्य रितीने छोटी (म्हणजेच 25 किंवा 30 पेक्षा जास्त नाही) असेल तर श्रेणी पद्धती काही वेळा वर्ग अंतराळ स्वरूपातील माहितीसाठी सुद्धा वापरता येते. यासाठी वर्ग अंतराळ स्वरूपात असलेल्या माहितीचे रूपांतर केले पाहिजे. जर N हा 30 पेक्षा जास्त असेल तर माहितीला श्रेणी देण्यासाठी आवश्यक असणारी श्रमशक्ती अपेक्षेपेक्षा मोठी असते. अशावेळी श्रेणी सहसंबंध गुणांक पद्धतीतील सुत्राचा वापर करून वेळेची बचत करता येऊ शकते.

३.४.५ समवर्ती विचलन पद्धती (Concurrent Deviation Method)

समवर्ती विचलन पद्धती ही सहसंबंधाच्या अभ्यास करण्याच्या सर्व पद्धतीपैकी सोपी पद्धती आहे. या पद्धतीत एकच गोष्ट काढणे आवश्यक आहे ती म्हणजे X आणि Y चलाच्या बदलाची दिशा होय.

समवर्ती विचलन पद्धतीच्या सहाय्याने सहसंबंध काढण्याचे सुत्र पुढीलप्रमाणे आहे.

येथे, r_C - समवर्ती विचलन पद्धतीचा सहसंबंध गुणांक.

C - समवर्ती विचलनांची संख्या किंवा D_X आणि D_Y या गुणाकार करून येणाऱ्या धन चिन्हांची संख्या.

समवर्ती विचलन पद्धतीचे टप्पे किंवा पायऱ्या

१. X चलाच्या बदलाची दिशा माहित करणे. म्हणजेच पहिल्या मूल्याच्या तुलनेत दुसरे मूल्य वाढले किंवा कमी झाले किंवा स्थिर आहे. जर पहिल्या मूल्यापेक्षा दुसरे मूल्यात वाढ झाली असेल + (धन) चिन्हाने दर्शवावे. जर घट झाली असेल तर - (ऋण) चिन्हाने दर्शवावे आणि स्थिर असेल तर 0 (शुन्य) ने दर्शवावे. अशाच प्रकारे दुसरे मूल्याच्या तुलनेत तिसऱ्या मूल्यात वाढ झाली किंवा घट झाली किंवा स्थिर आहे हे शोधावे लागते. अशीच प्रक्रिया इतर मूल्यासाठी वापरून त्यास D_X या अक्षराने दर्शवावे.

२. टप्पा क्रमांक 1 मध्ये चर्चा केल्याप्रमाणे Y चलाच्या बदलाची दिशा माहित करावे व त्यास D_Y या अक्षराने दर्शवावे.

३. D_X आणि D_Y चा गुणाकार करा आणि C चे मूल्य निर्धारीत करा, म्हणजेच D_X आणि D_Y च्या गुणाकारातून येणारी धनात्मक चिन्हांची संख्या मोजणे.

४. सुत्राचा उपयोग करून समवर्ती विचलन पद्धतीच्या सहाय्याने सहसंबंध गुणांक काढणे.

$$r_C = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2C-N}{N}\right)}$$

येथे लक्षात ठेवण्यासारखी बाब म्हणजे वर्गमुळाच्या आत आणि बाहेर असलेले $\pm$ चिन्ह कारण की आपण ऋण चिन्हाचे वर्गमुळ काढू शकत नाही. म्हणून जर $\frac{2C-N}{N}$ चे मूल्य जर ऋण असेल तर ते ऋण मूल्य ऋण चिन्हा सोबत गुणाकार करून त्यास धन करता येईल आणि त्याचे वर्गमुळ घेता येईल. परंतु शेवटचा निष्कर्ष हा ऋण असेल. जर $\frac{2C-N}{N}$ चे मूल्य धन असेल तर सहसंबंध गुणांकाचे मूल्य सुद्धा धन असेल.

उदाहरण : पुढील दिलेल्या माहितीच्या आधारे समवर्ती विचलन पद्धतीच्या सहाय्याने सहसंबंध गुणांक काढा.

X	60	55	50	56	30	70	40	35	80	80	75
Y	65	40	35	75	63	80	35	20	80	60	60

उत्तर :

X	D_X	Y	D_Y	$D_X D_Y$
60	–	65	–	–
55	–	40	–	+
50	–	35	–	+
56	+	75	+	+
30	–	63	–	+
70	+	80	+	+
40	–	35	–	+
35	–	20	–	+
80	+	80	+	+
80	0	60	–	0
75	–	60	0	0

वरील तक्त्यावरून C = 8, N = 11.

सुत्र $$r_C = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2C - N}{N}\right)}$$

$$r_C = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2(8) - 11}{11}\right)}$$

$$r_C = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{16-11}{11}\right)}$$

$$r_C = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{5}{11}\right)}$$

$$r_C = \pm\sqrt{\pm 0.45}$$

$$r_C = \pm 0.67$$

$\therefore$ समवर्ती विचलन पद्धतीनुसार सहसंबंध गुणांकाचे मूल्य 0.67 आहे.

उदाहरण : पुढील दिलेल्या किंमत आणि आयातीच्या माहितीच्या आधारे समवर्ती विचलन पद्धतीच्या सहाय्याने सहसंबंध गुणांक काढा.

किंमत	368	384	385	361	347	384	395	403	400	385
आयात	22	21	24	20	22	26	24	29	28	27

उत्तर : समजा किंमत म्हणजे X आणि आयात म्हणजे Y.

X	D_X	Y	D_Y	$D_X D_Y$
368	–	22	–	–
384	+	21	–	–
385	+	24	+	+
361	–	20	–	+
347	–	22	+	–
384	+	26	+	+
395	+	24	–	–
403	+	29	+	+
400	–	28	–	+
385	–	27	–	+

वरील तक्त्यावरून C = 6 आणि N = 10.

सुत्र $$r_C = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2C-N}{N}\right)}$$

$$r_C = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2(6)-10}{10}\right)}$$

$$r_C = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{12-10}{10}\right)}$$

$$r_C = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2}{10}\right)}$$

$$r_C = \pm\sqrt{\pm 0.5}$$

$$r_C = \pm 0.71$$

$\therefore$ समवर्ती विचलन पद्धतीनुसार सहसंबंध गुणांकाचे मूल्य 0.71 आहे.

समवर्ती विचलन पद्धतीचे गुण आणि दोष :

गुण :

समवर्ती विचलन पद्धतीचे प्रमुख गुण किंवा फायदे पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. समवर्ती विचलन पद्धती ही सर्व पद्धतीमध्ये सोपी पद्धती आहे.

२. जेष्ठ घटकांची संख्या खुप मोठी असेल तेव्हा समवर्ती विचलन पद्धतीच्या सहाय्याने इतर क्लीष्ट पद्धतीच्या वापराच्या आगोदर सहसंबंधाची दिशा माहित करता येते.

दोष :

समवर्ती विचलन पद्धतीचे दोष किंवा मर्यादा पुढीलप्रमाणे आहेत.

१. या पद्धतीमध्ये छोटे आणि मोठे बदल यामध्ये फरक करता येत नाही. उदाहरणार्थ जर X चलामध्ये 100 ते 101 पर्यंत वाढ झाली तर '+' चिन्ह येते आणि Y चलामध्ये 60 ते 160 पर्यंत वाढ झाली तर सुद्धा '+' चिन्ह येते. म्हणून दोन्ही चल सारख्या दिशेने बदलत असल्यामुळे दोन्ही चलाला समान भारांक मिळतो.

२. समवर्ती विचलन पद्धतीच्या सहाय्याने प्राप्त झालेल्या निष्कर्षावरून आपणास फक्त सहसंबंधाची उपस्थिती किंवा अनुपस्थिती समजते.

३.५ सहसंबंध गुणांकाच्या संभाव्य त्रुटी आणि त्याचे अन्वयार्थ

(Probable Error of the Coefficient of Correlation and its Interpretations)

सहसंबंध गुणांकाचे मापन केल्यानंतर पुढची बाब म्हणजे तो किती प्रमाणात अवलंबित आहे हे शोधणे होय. यासाठी सहसंबंध गुणांकाची संभाव्य त्रुटी काढणे गरजेचे आहे. जर सहसंबंध गुणांकामध्ये संभाव्य त्रुटी मिळवली आणि वजा केली तर त्यापासून आपणास दोन अशा मर्यादा मिळतात त्यामध्ये आपण सहसंबंध गुणांक बदलण्याची अपेक्षा करू शकतो. याचा अर्थ असा की, जर एकाच समष्टीमधून यादृच्छिक नमुन्याच्या आधारावर दुसरा नमुना संच काढला तर त्या पासून काढलेला सहसंबंध गुणांक हा दोन मर्यादाच्या बाहेर जाणार नाही.

कार्ल पिअरसनच्या सहसंबंध गुणांकाच्या संभाव्य त्रुटी पुढील सुत्राच्या सहाय्याने काढता येतील.

सहसंबंध गुणांकाच्या संभाव्य त्रुटी (P.E.) $= 0.6745 \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$

येथे, r - सहसंबंध गुणांक

N - निरिक्षणांच्या जोड्यांची संख्या

जर सहसंबंधाच्या मूल्यामधुन संभाव्य त्रुटी वजा केली तर त्यापासून न्यूनत्तम किंवा खालची मर्यादा मिळते आणि जर सहसंबंधाच्या मूल्यामध्ये संभाव्य त्रुटी मिळविली तर उच्चत्तम किंवा वरची मर्यादा मिळते. ज्या मर्यादामध्ये सहसंबंध गुणांक बदलणे अपेक्षित आहे. म्हणून जर 100 जोड्याच्या निरिक्षणावरून काढलेल्या सहसंबंध गुणांकाचे मूल्य + 0.8 असेल तर त्यावरून संभाव्य त्रुटी पुढीलप्रमाणे काढता येतील.

$$P.E. = 0.6745 \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

$$P.E. = 0.6745 \frac{1-(0.8)^2}{\sqrt{100}}$$

$$P.E. = 0.6745\frac{1-0.64}{10}$$

$$P.E. = 0.6745\frac{0.36}{10}$$

$$P.E. = 0.6745 \times 0.036$$

$$P.E. = 0.024282$$

यावरून पुढील अन्वयार्थ काढता येतील.

१. याचा अर्थ असा की समष्टीमध्ये सहसंबंधाच्या मर्यादा $r \pm$ P.E. असेल म्हणजेच 0.8 ± 0.0243 किंवा 0.7757 आणि 0.8243 असतील.

२. जर सहसंबंधाचे मूल्य संभाव्य त्रुटी पेक्षा लहान असेल तर सहसंबंधाचा कुठलाही पुरावा नसेल.

३. जर सहसंबंधाचे मूल्य संभाव्य त्रुटीच्या सहापट अधिक असेल तर तेथे लक्षणीय सहसंबंध असेल.

४. जर संभाव्य त्रुटी फार मोठी नाही आणि सहसंबंध गुणांक 0.5 किंवा त्यापेक्षा जास्त असेल तर तेथे लक्षणीय सहसंबंध असेल.

५. सहसंबंध गुणांकाचे अन्वयार्थ काढण्यासाठी संभाव्य त्रुटी हे मापक म्हणून तेंव्हाच करता येईल जेंव्हा निरिक्षणांची संख्या मोठी असेल जर निरिक्षणांची संख्या लहान असेल तर संभाव्य त्रुटी पासून चुकीचे निष्कर्ष मिळू शकतात.

६. संभाव्य त्रुटी या मापकाचा वापर सहसंबंध गुणांकाचे अन्वयार्थ काढण्यासाठी तेंव्हाच करता येईल जेंव्हा अभ्यास हा नमुन्याच्या आधारे केला आहे आणि नमुने हे नि:पक्षपाती आणि प्रातिनिधीक असतील.

३.६ निर्धारण गुणांक (Coefficient Determination)

संभाव्य त्रुटी ऐवजी सहसंबंध गुणांकाचे अन्वयार्थ काढण्यासाठी वापरण्यात येणारी महत्त्वाची आणि उपयुक्त पद्धती म्हणजे निर्धारण गुणांक होय. निर्धारण गुणांक म्हणजे सहसंबंध गुणांकाचा वर्ग होय.

निर्धारण गुणांक = (सहसंबंध गुणांक)^2

निर्धारण गुणांक हे सहसंबंधाचे चांगले मापक आहे कारण याआधारे निर्धारण गुणांक हे सहसंबंधाचे चांगले मापक आहे कारण याआधारे आपणास स्वतंत्र घटकाचा अवलंबित घटकावर होणारा परिणाम मिळतो. उदाहरणार्थ जर किंमत आणि सहसंबंध गुणांक यांच्यातील सहसंबंध गुणांक + 0.8 आहे. म्हणजे याचा अर्थ असा नाही की, पुरवठ्यातील 80% बदले हे किंमतीतील बदलामुळे आहेत. तथापी, जर आपण निर्धारण गुणांक (r^2) काढला तर तो $(+0.8)^2$ किंवा + 0.64 असेल याचा अर्थ असा की, पुरवठ्यात होणारे 64% बदल हे किंमतीतील बदलामुळे आहेत. हा निर्धारण गुणांकाचा महत्त्वाचा गुणधर्म आहे.

म्हणून यावरून आपणास असे म्हणता येईल की,

$$\text{निर्धारण गुणांक} = \frac{\text{स्पष्ट प्रचरण}}{\text{एकुण प्रचरण}}$$

वरील उदाहरणात एकुण प्रचरण 1 (एकक) आहे आणि स्पष्ट प्रचरण 0.64 आहे.

काहीवेळा अस्पष्ट प्रचरण काढून सुद्धा सहसंबंध गुणांकाचे अन्वयार्थ लावता येतात.

अनिर्धारण गुणांक म्हणजे अस्पष्ट प्रचरण आणि एकुण प्रचरण याचे गुणोत्तर होय.

K^2 = अनिर्धारण गुणांक

$$K^2 = \; = \frac{\text{अस्पष्ट प्रचरण}}{\text{एकुण प्रचरण}}$$

$$K^2 = 1 - r^2$$

आपली प्रगती तपासा - १

दिलेल्या पर्यायातून योग्य पर्याय निवडा.

१. सहसंबंधाचे मूल्य .... या दरम्यान असते.

(अ) – 1 आणि + 1 (ब) 0 आणि 1

(क) – 1 आणि 0 (ड) यापैकी नाही

२. जर दोन चल एकमेकांना विरोधी दिशेने जात असतील तर त्या दोन चलातील सहसंबंध हा .... असतो.

(अ) धनात्मक (ब) शुन्य (क) पूर्ण (ड) ऋण

३. पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध .... ने दर्शविता येईल.

(अ) 0 (ब) 1 (क) 0.5 (ड) – 1

४. U = X आणि V = – X यांच्यातील सहसंबंध .... आहे.

(अ) + 1 (ब) – 1 (क) 0 (ड) 0.5

५. X आणि X यांच्यातील सहसंबंध ...... आहे.

(अ) – 1 to + 1 (ब) 0 (क) – 1 (ड) 1

आपली प्रगती तपासा - २

एक किंवा दोन वाक्यात उत्तरे द्या.

१. सहसंबंध म्हणजे काय ?

२. रेषीय सहसंबंध म्हणजे काय ?

३. कार्ल पिअरसनच्या सहसंबंध गुणांकाचे सुत्र सांगा.

४. निर्धारण गुणांक म्हणजे काय ?

५. ऋणात्मक सहसंबंधाची व्याख्या करा.

३.७ सारांश

प्रस्तुत घटकामध्ये आपण सहसंबंध म्हणजे काय ते अभ्यासले. सहसंबंधाचे विविध श्रेत्रात असलेले महत्त्व जाणून घेतले. तसेच सहसंबंधाचे विविध प्रकार अभ्यासले त्यात धनात्मक आणि ऋणात्मक सहसंबंध, साधा, अंशीक आणि बहु सहसंबंध व रेषीय आणि अरेषीय सहसंबंध अभ्यासला. सहसंबंध मापनाच्या विविध पद्धतीचा अभ्यास केला त्यात प्रामुख्याने कार्ल पिअरसनचा सहसंबंध गुणांक व स्पिअरमनचा श्रेणी सहसंबंध गुणांक याचा अभ्यास केला तसेच समवर्ती विचलन पद्धतीचे

ज्ञान मिळविले. सहसंबंध गुणांकाची संभाव्य त्रुटी आणि त्यापासूनचे अन्वयार्थ अभ्यासले. सहसंबंधाचा प्रभाव मोजण्यासाठी निर्धारण गुणांकाचा सुद्धा अभ्यास केला. सहसंबंधाचा वापर सामाजिक शास्त्रातील संशोधनात मोठ्या प्रमाणात केला जातो. तसेच सहसंबंधाचे सामाजिक शास्त्राच्या संशोधनात अनन्यसाधारण असे म्हत्त्व आहे.

३.८ पारिभाषीक शब्द

१.	सहसंबंध	: दोन घटकातील किंवा चलातील संबंधाची श्रेणी मोजते.
२.	धन सहसंबंध	: एका चलामध्ये वाढ झाली तर दुसऱ्या चलामध्ये सुद्धा वाढ होते किंवा एका चलात घट झाली तर दुसऱ्या चलामध्ये सुद्धा घट होते.
३.	ऋण सहसंबंध	: दोन घटकामध्ये किंवा चलामध्ये विरूद्ध दिशेने बदल होतो.
४.	रेषीय सहसंबंध	: दोन घटकांमध्ये किंवा चलामध्ये स्थिर गुणोत्तराने बदल होतो.
५.	अरेषीय सहसंबंध	: दोन घटकामध्ये किंवा चलामध्ये अस्थिर गुणोत्तराने बदल होतो.

३.९ आपली प्रगती तपासा उत्तरे

आपली प्रगती तपासा - १

१. – 1 आणि + 1

२. ऋण

३. – 1

४. – 1

५. 1

आपली प्रगती तपासा - २

१. दोन घटकामधील किंवा चलामधील संबंधाची श्रेणी मोजण्याच्या परिमाणास सहसंबंध असे म्हणतात.

२. दोन घटकामध्ये किंवा चलामध्ये स्थिर गुणोत्तराने बदल होत असेल तर त्यास रेषीय सहसंबंध असे म्हणतात.

३. कार्ल पिअरसनच्या सहसंबंध गुणांकाचे सुत्र

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2}\sqrt{\sum y^2}} \quad \text{किंवा} \quad r = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \cdot \sum Y}{N}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}\sqrt{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}}}$$

४. निर्धारण गुणांक हा सहसंबंध गुणांकाचे अन्वयार्थ काढण्यासाठी वापरण्यात येणारे महत्त्वाचे परिमाण आहे. ज्याचे मापन सहसंबंधाचा वर्ग करून केले जाते.

५. जर दोन चलातील किंवा घटकातील होणारा बदल हा विरूद्ध दिशेने असेल तर त्यास ऋण सहसंबंध असे म्हणतात.

३.१० स्वाध्याय

१. खालील माहितीच्या आधारे कार्ल पिअरसनचा सहसंबंध गुणांक काढा.

अर्थशास्त्रातील गुण	48	35	17	23	47
लेखाशास्त्रातील गुण	45	20	40	25	45

२. दिलेल्या माहितीवरून X आणि Y मधील सहसंबंध गुणांक काढा.

$\sum dXdY = 3044$, $\sum dX^2 = 8288$, $\sum dY^2 = 2264$, $\sum dX = 170$, $\sum dY = 120$, N = 10.

३. खालील दिलेल्या माहितीच्या आधारे श्रेणी सहसंबंध गुणांक काढा.

X	80	78	75	75	68	67	60	59
Y	12	13	14	14	14	16	15	17

४. खालील माहितीच्या आधारे चार्ल्स स्पिअरसनचा सहसंबंध गुणांक काढा.

पतीचे वय (वर्षे)	20	22	23	25	25	28	29	30	30	34
पत्नीचे वय (वर्षे)	18	20	22	24	21	26	26	25	27	29

५. पुढील माहितीच्या आधारे समवर्ती विचलन पद्धतीच्या सहाय्याने सहसंबंध गुणांक काढा.

X	18	16	14	13	14	22	27	21	29	30
Y	12	13	19	17	14	14	16	15	17	20

६. खालील दिलेल्या माहितीच्या आधारे समवर्ती विचलन पद्धतीच्या सहाय्याने संबंध गुणांक काढा.

X	44	46	46	48	54	52	50	70	56	60
Y	52	36	40	42	40	42	44	43	48	50

७. टिपा लिहा :

१) सहसंबंधाचे महत्त्व

२) सहसंबंधाचे प्रकार

३) विकीर्ण बिंदूलेख पद्धती

४) समवर्ती विचलन पद्धती

५) निर्धारण गुणांक

६) संभाव्य त्रुटी

३.११ संदर्भ

१. डॉ. वा. भा. पाटील (२००६), संशोधन पद्धती, प्रशांत पब्लिकेशन, जळगाव.

२. प्रा. राम देशमुख (२०११), मुलभूत सांख्यिकी, विद्या प्रकाशन, नागपूर.

३. डॉ. विश्वास कदम (२०१४), सांख्यिकी पद्धती, कैलास पब्लिकेशन, औरंगाबाद.

४. डॉ. प्रदिप आगलावे (२०००), संशोधन पद्धती, विद्या प्रकाशन, नागपूर.

५. Gupta, S.P. (2014), Statistical Methods, Sultan Chand and Sons, New Delhi.

६. Elhance, elhance, Aggarwal (2015), Fundamentals of Statistics, Kitab Mahal, New Delhi.

घटक ४

प्रतिपगमन विश्लेषण

(Regression Analysis)

४.० उद्दिष्टे (Objectives)

विद्यार्थी मित्रांनो या घटकाच्या अध्ययनानंतर आपणास -

- प्रतिपगमनाच्या संकल्पनेचा अर्थ स्पष्ट होईल.
- प्रतिपगमन आणि सहसंबंध यांच्यातील तुलना करता येईल.
- प्रतिपगमन प्राककलनाच्या विविध पद्धतीचे ज्ञान होईल.
- प्रतिगमन समीकरणे तयार करता येतील.
- प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटीची संकल्पना स्पष्ट होईल.

४.१ प्रस्तावना (Introduction)

संख्याशास्त्रामध्ये प्रतिपगमन हे अतिशय महत्त्वाचे तंत्र आहे. प्रतिपगमन तंत्राच्या सहाय्याने आपणास एका चलाचे मूल्य माहित असताना दुसऱ्या चलाचे अपेक्षित मूल्य माहित करता येते. विद्यार्थी मित्रहो मागील घटकामध्ये आपण पाहिले की, दोन किंवा दोनपेक्षा अधिक भिन्न चलामध्ये सहसंबंध असतो. तेंव्हा ती चले परस्परावर अवलंबून असतात तसेच ती परस्परावर परिणाम करणारी असतात. उदाहरणार्थ, मागणी आणि किंमत यांच्यात संबंध असेल तर दिलेल्या किंमतीला अपेक्षित मागणी करू शकतो किंवा दिलेल्या मागणीला अपेक्षित किंमत माहित करू शकतो. अशाच प्रकारे जाहिरात खर्च आणि विक्री यांच्यात संबंध असेल तर विशिष्ट जाहिरात खर्च दिलेला असताना आपण अपेक्षित विक्री माहित करू शकतो. अशाच प्रकारचा संबंध अनेक आर्थिक घटकामध्ये असतो. दोन किंवा दोन पेक्षा अधिक चलामध्ये अशा प्रकारचा संबंध आहे कि नाही पाहण्यासाठी केवळ सहसंबंध हि संकल्पना उपयुक्त ठरत नाही. त्याचबरोबर प्रतिपगमन हि संकल्पना उपयुक्त ठरते. प्रस्तूत घटकामध्ये आपण प्रतिपगमनाविषयी सविस्तर माहिती मिळविणार आहोत.

४.२ प्रतिपगमन (Regression)

४.२.१ प्रतिपगमन - अर्थ आणि संकल्पना

प्रतिपगमन हे संख्याशास्त्रातील एक असे तंत्र आहे ज्याच्या सहाय्याने आपण एका चलाची मूल्ये दिलेली असताना किंवा ज्ञात असताना त्याच्या सहाय्याने दुसऱ्या चलाचे माहित नसणारे मूल्य किंवा अपेक्षित मूल्य माहित करता येते. प्रतिपगमनामध्ये दोन घटकांतील किंवा चलांतील सरासरी

बदल स्पष्ट केला जातो. तसेच त्याच्या सहाय्याने आपणास अंदाज वर्तविता येतो किंवा अपेक्षित मूल्य काढता येते.

'प्रतिपगमन' या संकल्पनेचा शब्दकोषातील अर्थ 'मागे जाणे' किंवा 'मागे फिरणे' असा आहे. 'प्रतिगपमन' या संकल्पनेचा सर्वप्रथम वापर १८७७ मध्ये सर फ्रांसिस गॅल्टन या इंग्लिश शास्त्रज्ञाने केला. त्यांनी प्रतिपगमनाची संकल्पना आपला शोधनिबंध "Regression Towards Mediocrity in Hereditary Stature" यात प्रस्तूत केली. या शोधनिबंधासाठी त्यांनी १००० वडिलांची व त्यांच्या मुलांच्या उंचीचा अभ्यास केला. त्यात त्यांना असे आढळून आले की, वडिलांची उंची आणि त्यांच्या मुलांची उंची यांच्यामध्ये सहसंबंध आहे आणि ते या सहसंबंधाबाबतीत काही मजेशीर निष्कर्षा पर्यंत पोहोचले. त्यात त्यांना असे आढळून आले की, उंची जास्त असणाऱ्या वडिलांची मुले ही उंच असतात. उंची कमी म्हणजेच बुटक्या वडिलांची मुले ही बुटकी किंवा कमी उंचीची असतात. उंची जास्त असणाऱ्या वडिलांच्या मुलांच्या उंचीची सरासरी ही त्यांच्या वडिलांच्या सरासरी उंचीपेक्षा कमी असते. उंची कमी असणाऱ्या वडिलांच्या मुलांच्या उंचीची सरासरी ही त्यांच्या वडिलांच्या सरासरी उंचीपेक्षा जास्त असते. गॅल्टन यांना असे आढळून आले की, मुलांच्या सरासरी उंचीची त्यांच्या वंशाच्या सरासरी उंचीपासून घेतलेली विचलने ही वडिलांच्या सरासरी उंचीची त्यांच्या वंशाच्या सरासरी उंचीपासून घेतलेल्या विचलनापेक्षा कमी असतात. जेव्हा वडिलांची उंची सरासरी पेक्षा कमी किंवा जास्त असते तेव्हा मुलाच्या उंचीमध्ये मागे जाण्याची किंवा सरासरी प्रतिगमीत होण्याची प्रवृत्ती असते. अलीकडच्या काळात अपेक्षित मूल्य माहित करण्यासाठी किंवा अंदाज वर्तविण्यासाटी या तंत्राचा मोठ्या प्रमाणावर वापर होत आहे.

प्रतिपगमनाच्या व्याख्या :

प्रतिपगमनाच्या व्याख्या पुढीलप्रमाणे आहेत.

''प्रतिपगमन म्हणजे दोन किंवा अधिक चलाच्या मुळ एकका संदर्भातील माहितीच्या सरासरी संबंधाचे मापक होय.''

मॉम्स हॅम्बुर्ग यांच्या मते,

''प्रतिपगमन विश्लेषण असा पद्धतीशी संबंधित आहे ज्यात एक किंवा अधिक चलांच्या मूल्यांच्या ज्ञानापासून बदलत्या चलाच्या मूल्यांचे अंदाज बांधले जातात आणि या अंदाज प्रक्रियेमध्ये असलेल्या त्रुटींचे मोजमाप केले जाते.''

टॅरो यमने यांच्या मते,

''प्रतिपगमन विश्लेषण हे अर्थशास्त्र आणि व्यवसाय संशोधनात वारंवार वापरल्या जाणाऱ्या तंत्रापैकी एक तंत्र आहे ज्यात दोन किंवा अधिक चल कारणाने संबंधित असतात त्यांचा संबंध शोधला जातो.''

या-ल्यूम चाऊ यांच्या मते,

''प्रतिपगमन विश्लेषण चलांमधील नात्याचे स्वरूप प्रस्थापित करण्याचा प्रयत्न करते. म्हणजेच चलामधील कार्यशील संबंधाचा अभ्यास करणे आणि त्याद्वारे अंदाज वर्तविण्याची किंवा भविष्यवाणी करण्याची यंत्रणा पुरविते.''

वरील व्याख्यावरून हे स्पष्ट होते की, प्रतिपगमन विश्लेषण हे एक सांख्यिकीय साधन किंवा तंत्र आहे. ज्याआधारे आपण एका चलाच्या अज्ञात मूल्याचे आकलन किंवा भविष्यवाणी दुसऱ्या चलाच्या माहित असलेल्या मूल्याच्या आधारे करू शकतो. ज्या चलाचा वापर अंदाज वर्तविण्यासाठी केला जातो त्यास स्वतंत्र घटक असे म्हणतात आणि ज्या घटकाचा किंवा चलाचा अंदाज वर्तविला जातो त्यास विसंबित घटक किंवा चल म्हणतात. सामान्यपणे स्वतंत्र चल X ने आणि विसंबित Y ने दर्शविली जातात. अशा प्रकारच्या X आणि Y या दोन चलामधील प्रतिपगमनाला साधे रेषीय प्रतिपगमन विश्लेषण असे म्हणतात, कारण येथे साधा म्हणजे एकच स्वतंत्र चल आहे आणि रेषीय म्हणजे विसंबित आणि स्वतंत्र घटकामध्ये रेषीय संबंध गृहीत धरण्यात आला आहे.

रेषीय म्हणजे समीकरण हे सरळ रेषीय आहे.

$$Y = a + bX$$

येते a आणि b हे स्थिरांक आहेत.

४.२.२ प्रतिगमनाचे महत्त्व

प्रतिपगमन विश्लेषण ही सांख्यिकीय सिद्धांताची शाखा आहे जी सर्व शास्त्रीय शाखामध्ये वापरली जाते. प्रतिपगमन तंत्राचा वापर आणि महत्त्व सर्वच सामाजिक, नैसर्गिक शास्त्रात होत असतो. अर्थशास्त्र हे एक सामाजिक शास्त्र असल्यामुळे प्रतिगमन विश्लेषणाचा उपयोग अर्थशास्त्रात सुद्धा होतो. उदाहरणार्थ, किंमत (X) आणि मागणी (Y) या दोन चलामध्ये अतिशय जवळचा संबंध असतो. त्यावरून X चलामध्ये होणारा बदल माहित झाला तर Y चलात होणारा अपेक्षित बदल माहित करता येतो. अशाच प्रकारे कर आकारणी आणि वस्तूच्या किंमतीत होणारी वाढ यांच्यातही

जवळचा संबंध असतो त्यामुळे करात होणाऱ्या बदलामुळे वस्तूच्या किंमतीत कशा प्रकारे बदल होईल याविषयी अंदाज वर्तविता येतो. त्यामुळे प्रतिपगमन तंत्राचा उपयोग अर्थशास्त्रज्ञ, सरकार, व्यापारी या सर्वांना होतो. तसेच प्रतिपगमन विश्लेषणाचा उपयोग इतर सामाजिक शास्त्रे व नैसर्गिक शास्त्रे यामध्ये सुद्धा होतो.

प्रतिपगमन विश्लेषण पुढील गोष्टी साध्य करण्याचा प्रयत्न करते.

१. प्रतिपगमन विश्लेषण स्वतंत्र चलाच्या मूल्याच्या सहाय्याने अवलंबित चलाच्या मूल्याचे अंदाज प्रदान करते.

२. प्रतिपगमन विश्लेषणाचे दुसरे लक्ष्य म्हणजे प्राककलन प्रक्रीयेला आधार म्हणून प्रपिगमन रेषेच्या सहाय्याने अंतर्भूत असलेल्या त्रुटीचे मापक प्राप्त करणे.

३. प्रतिपगमन गुणांकाच्या सहाय्याने आपण सहसंबंध गुणांकाचे मापन करू शकतो.

४.२.३ सहसंबंध आणि प्रतिपगमनाची तुलना

सहसंबंध विश्लेषण आणि प्रतिपगमन विश्लेषण दोन्ही आपणास दोन चलातील संबंधाचा अभ्यास करण्यासाठी मदत करतात. तरी त्या दोहोच्या उद्दीष्टात आणि दृष्टीकोनात फरक आहे.

१. सहसंबंधाचा अभ्यास दोन चलामधील सहप्रचरणाचा अभ्यास करण्यासाठी केला जातो. या आधारे आपणास दोन चल हे समान दिशेने किंवा विरूद्ध दिशेने बदलतात याची माहिती मिळते. सहसंबंध गुणांकामध्ये सहप्रचरणाची श्रेणी प्रतिबिंबित होते.परंतु सहसंबंधामध्ये संबंधाच्या स्वरूपाचा अभ्यास केला जात नाही. सहसंबंध आपणास अभ्यासासाठी घेतलेल्या चलाच्या सापेक्ष हालचालीबद्दल माहिती सांगत नाही आणि आपण एका चलाचे मूल्य विचारात घेतल्याशिवाय दुसऱ्या चलाविषयी अंदाज वर्तवू शकत नाही. अशा प्रकारचा अंदाज वर्तविणे प्रतिपगमन विश्लेषणात शक्य आहे. म्हणजेच अनुमान काढणे किंवा अंदाज वर्तविणे यासाठी सहसंबंधाचा वापर करता येत नाही तर प्रतिपगमन विश्लेषणाचा वापर करता येतो.

२. दोन श्रेणी मध्ये असणारा सहसंबंध कारण आणि परिणाम संबंध असणे बंधनकारक नाही. किंमत आणि पुरवठा यांच्यामध्ये असलेला उच्च श्रेणीचा धनात्मक सहसंबंध याचा अर्थ असा नाही की, पुरवठा हा किंमतीतील बदलाचा परिणाम आहे. अभ्यासासाठी घेतलेल्या चलामध्ये कारण परिणाम संबंध नसले तरीही त्या चलामध्ये सहसंबंध असू शकतो. दुसऱ्या

बाजूने प्रतिपगमन विश्लेषणात एक चल हे कारण आणि दुसरे चल हे परिणाम आहे असे गृहीत धरले जाते. स्वतंत्र चल अवलंबित चलावर परिणाम करतो असे मानले जाते. आणि स्वतंत्र चलाच्या दिलेल्या मूल्याच्या आधारे अवलंबित चलाविषयी अंदाज किंवा भविष्यवाणी केली जाते.

३. सहसंबंध गुणांक r हा $\pm$ 1 या दरम्यान बदलतो. म्हणजेच, $-1 \le r \le +1$. प्रतिपगमन गुणांकाचे चिन्ह हे सहसंबंध गुणांकाच्या चिन्हाबरोबर असते. म्हणजेच जर सहसंबंध गुणांक धन असले तर प्रतिपगमन गुणांक सुद्धा धन असतात आणि जर सहसंबंध गुणांक ऋण असेल तर प्रतिपगमन गुणांक सुद्धा ऋण असतात.

४. सहसंबंध गुणांकाचे मूल्य एक पेक्षा जास्त नसते, परंतु प्रतिपगमन गुणांकामध्ये एक प्रतिपगमन गुणांक एक पेक्षा जास्त असू शकतो. परंतु दोन प्रतिपगमन गुणांकाचा गुणाकार हा कधीच एकपेक्षा जास्त नसतो कारण सहसंबंध गुणांक हा दोन प्रतिपगमन गुणांकाच्या गुणाकाराचे वर्गमुळ असते.

४.३ प्रतिपगमन प्राककलनाच्या पद्धती (Methods of Studying Regression)

प्रतिपगमन प्राककलनाच्या प्रामुख्याने तीन पद्धती आहेत त्या पुढीलप्रमाणे आहेत.

१) आलेख अभ्यास पद्धती

२) मुक्तहस्त वक्र पद्धती

३) न्यूनत्तम वर्ग पद्धती

४.३.१ प्रतिपगमनाची आलेख अभ्यास पद्धती

(Graphic Study Method of Regression)

प्रतिपगमन अभ्यास आलेख पद्धतीच्या सहाय्याने करण्यासाठी आपणास विकीर्ण बिंदूलेख काढावा लागते. बिंदूलेखामध्ये X आणि Y या चलाच्या मूल्याच्या एका जोडीसाठी एका बिंदूचा समावेश असतो. सामान्यपणे X चल समांतर अक्षावर दर्शविले जाते आणि Y चल उभ्या अक्षावर दर्शविले जाते. जेंव्हा सर्व संबंधित मूल्याच्या जोड्या विकीर्ण बिंदूलेखावर काढले जातात तेंव्हा आपणास X आणि Y चलाच्या मूल्याचा अंदाज किंवा भविष्यवाणी करण्यासाठी दोन प्रतिपगमन रेषा

काढाव्या लागतात. जी प्रतिपगमन रेषा X चे मूल्य दिले असताना Y च्या मूल्याचा अंदाज बांधते त्यास X चे Y वरील प्रतिपगमन रेषा असे म्हणतात. अशाचप्रकारे, जी प्रतिपगमन रेषा Y चे मूल्य दिले असताना X च्या मूल्याचा अंदाज बांधते त्यास X चे Y वरील प्रतिपगमन रेषा असे म्हणतात. जर दोन चलामधील सहसंबंध गुणांक हा पूर्ण सहसंबंध असतो तेव्हा त्याचे मूल्य – 1 किंवा + 1 असते. अशावेळी एकच प्रतिपगमन रेषा असते कारण दोन्ही श्रृंखलेमधील बदल हे स्थिर प्रमाणात होतात. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास जर दोन चलामध्ये पूर्ण सहसंबंध असेल तर दोन्ही प्रपिगमन रेषा समान किंवा सारख्या असतात. जर स्वतंत्र चल आणि विसंबित चल यांच्या मूल्याचा आलेख जर सरळ रेषेत येत असेल तर त्या प्रतिपगमनास रेषीय प्रतिपगमन असे म्हणतात. जर स्वतंत्र चल आणि विसंबित चल यांच्या मूल्याचा आलेख सरळ रेषेत येत नसेल तर त्या प्रतिपगमनास अरेषीय प्रतिगमन असे म्हणतात.

४.३.२ प्रतिपगमनाची मुक्त हस्त वक्र पद्धती

प्रतिपगमनाच्या मुक्त हस्त वक्र पद्धतीमध्ये सर्वप्रथम आपणास X आणि Y या दोन चलाचे एका मूल्याच्या जोडीला एक बिंदू याप्रमाणे विकीर्ण बिंदूलेख काढावा लागतो. त्यानंतर आपणास दोन मुक्त हस्त सरळ रेषा काढाव्या लागतात. या दोन रेषेपैकी एक रेषा अशाप्रकारे काढली पाहिजे की, Y श्रेणीची त्याच्या माध्या पासूनची धनात्मक विचलने ऋणात्मक विचलनाला रद्द केली पाहिजेत. म्हणजेच रेषेच्या एका बाजूच्या विचलनाची बेरीज ही दुसऱ्या बाजूच्या विचलनाच्या बेरजे बरोबर असली पाहिजे. या प्रतिपगमन रेषेला Y ची X वरील प्रतिपगमन रेषा असे म्हणतात. दुसरी प्रतिपगमन रेषा अशाप्रकारे काढली पाहिजे की, X श्रेणीची त्याच्या माध्यापासूनची धनात्मक विचलने ही ऋणात्मक विचलनाला रद्द केली पाहिजेत, म्हणजेच रेषेच्या एका बाजूच्या विचलनाची बेरीज ही दुसऱ्या बाजूच्या विचलनाच्या बेरजे बरोबर असली पाहिजे या प्रतिपगमन रेषेला X ची Y वरील प्रतिपगमन रेषा असे म्हणतात. दोन प्रतिपगमन रेषा एकमेकांना एका बिंदूत छेदतात त्या बिंदूचे निर्देशक दोन श्रृंखलांचे माध्य दर्शवितात. जर दोन चलामधील सहसंबंध हा पूर्ण धन किंवा पूर्ण ऋण असेल तर तेंव्हा एकच प्रतिपगमन रेषा असते.

तथापी, मुक्त हस्त वक्र पद्धतीच्या सहाय्याने प्रतिपगमन रेषा काढणे खुप कठीण जाते. सहसा विकीर्ण बिंदूलेखामध्ये दोराचा तुकडा वारंवार अशाप्रकारे समायोजित केला जातो की, धनात्मक आणि ऋणात्मक विचलने एकमेकांना रद्द करतात. एकदा का या रेषा काढल्या मग आपण Y च्या X

वरील प्रतिपगमन रेषेवरून Y च्या मूल्याचा अंदाज किंवा भाकीत करू शकतो आणि X च्या Y वरील प्रतिपगमन रेषेवरून X च्या मूल्याचा अंदाज किंवा भाकीत करू शकतो.

४.३.३ प्रतिपगमनाची न्यूनत्तम वर्ग पद्धती

मुक्तय हस्त वक्र पद्धतीद्वारे प्रतिपगमन रेषेच्या रेखांकनाशी संबंधित अडचणी टाळण्यासाठी X आणि Y श्रेणीच्या हालचालीमधील गणितीय संबंध प्रस्थापीत केला जातो आणि X आणि Y श्रेणीच्या संबंधित हालचालीचे प्रतिनिधीत्व करण्यासाठी बीजगणितीय समीकरणे प्राप्त केली जातात. अशी एक पद्धती म्हणजे न्यूनत्तम वर्ग पद्धती होय. या पद्धतीत आपण दिलेल्या चलाची मूल्ये आणि सर्वोत्कृष्ट फिट च्या रेषांनी दिलेली अंदाजित मूल्ये यांच्यामधील विचलनाच्या वर्गाची बेरीज न्यूनत्तम करतो. Y चे X वरील प्रतिपगमन रेषा ही एक अशी रेषा आहे जी X च्या विशिष्ट मूल्यासाठी Y च्या मूल्याचे सर्वोत्कृष्ट अंदाज देते आणि त्याचप्रमाणे X चे Y वरील प्रतिपगमन रेषा ही एक अशी रेषा आहे जी Y च्या विशिष्ट मूल्यासाठी X च्या मूल्याचे सर्वोत्कृष्ट अंदाज देते. जर Y चलाची मूल्य Y अक्षावर (म्हणजेच उभ्या अक्षावर) मांडली तर Y ची X वरील प्रतिपगमन रेषा ही उभ्या विचलनाच्या वर्गाची बेरीज न्यूनत्तम करते. तसेच, जर X चलाची मूल्ये X अक्षावर (म्हणजेच आडव्या अक्षावर) मांडली तर X ची Y वरील प्रतिपगमनरेषा ही आडव्या विचलनाच्या वर्गाची बेरीज न्यूनत्तम करते.

न्यूनत्तम वर्ग पद्धती मध्ये सर्वोत्कृष्ट फिट असणारी रेषा ही,

$Y = a + bX$ या सरळ रेषेच्या समीकरणाद्वारे काढली जाते आणि हि रेषा पुढील दोन सामान्य समीकरणाच्या सहाय्यानें काढली जाते.

$$\sum Y = na + b\sum X$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$$

वरील समीकरणामध्ये जर आपण X आणि Y या चलाची मूल्ये ठेवली तर आपणास ती समीकरणे सोडवून आपण a आणि b ची मूल्ये काढू शकतो. आणि त्याआधारे आपणास Y ची X वरील प्रतिपगमन रेषा मिळते. येथे Y हा विसंबित घटक आणि X हा स्वतंत्र घटक आहे. X ची Y वरील प्रतिपगमन रेषा मिळविण्यासाठी आपण X चल म्हणजे विसंबित घटक आणि Y चल म्हणजे स्वतंत्र घटक म्हणून गृहीत धरूया, तेंव्हा आपणास पुढील सामान्य समीकरणे मिळतील,

$$\sum X = na + b\sum Y$$

$$\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2$$

आणि ही समीकरणे सोडवल्यास आपणास X = *a* + *b*Y ही प्रपिगमन रेषा मिळते.

४.४ प्रतिपगमन समीकरणे

प्रतिपगमन समीकरणामध्ये जर आपण X आणि Y या दोन चलाची बाब विचारात घेतली तर आपणास X चे Y वरील प्रतिपगमन आणि Y चे X वरील प्रतिपगमन अशा दोन प्रतिपगमन रेषा मिळतात. X ची Y वरील प्रतिपगमन रेषा Y च्या दिलेल्या मूल्यासाठी X चे सर्वात संभाव्य मूल्य देते आणि Y ची X वरील प्रतिपगमन रेषा X च्या दिलेल्या मूल्यासाठी Y चे सर्वात संभाव्य मूल्य देते. प्रतिपगमन समीकरणाला प्राककलीत समीकरणे असे सुद्धा म्हणतात. प्रतिपगमन समीकरणे प्रतिपगमन रेषांचे बीजगणितीय भाव असतात. दोन प्रतिपगमन रेषा असल्यामुळे दोन प्रतिपगमन समीकरणे आहेत. X चे Y वरील प्रतिगमन समीकरण याचा वापर Y चलाची मूल्ये दिलेली असताना X चलाच्या मूल्यातील विविधता स्पष्ट करण्यासाठी केला जातो आणि Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण याचा वापर X चलाची मूल्ये दिलेली असताना Y चलाच्या मूल्यातील विविधता स्पष्ट करण्यासाठी केला जातो.

Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण पुढील प्रमाणे व्यक्त केले जाते.

Y = *a* + *b*X

या समीकरणात,

Y हे विसंबित चल आहे. म्हणजेच याचे मूल्य X वर अवलंबून असते.

X हे स्वतंत्र चल आहे. म्हणजेच याआधारे आपण X चे मूल्य दिलेले असताना Y चे मूल्य काढू शकतो.

a हा Yआंतरखंड आहे कारण याचे मूल्य हे प्रतिपगमन रेषा ज्या ठिकाणी Y-अक्षाना म्हणजेच उभ्या अक्षाला छेदते त्या बिंदूला असते.

b रेषेचा उतार आहे जो X चलामध्ये एकक बदल झाल्यामुळे Y चलात होणारा बदल दर्शवितो.

a आणि *b* या दोन स्थिरांकाची मूल्ये काढण्यासाठी पुढील दोन सामान्य समीकरणे एकसामाईकपणे सोडविली पाहिजे.

$$\sum Y = na + b\sum X$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$$

या समीकरणाला सामान्य समीकरणे असे म्हणतात.

या समीकरणात $\sum X$, $\sum Y$, $\sum XY$ आणि $\sum X^2$ एकूण बेरीज दर्शवितात जी X आणि Y या दोन चलाच्या मूल्याच्या जोड्यापासून काढता येतात आणि *n* ही मूल्यांच्या जोड्यांची संख्या आहे.

X चे *Y* वरील प्रतिपगमन समीकरण

X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरण पुढीलप्रमाणे व्यक्त केले जाते.

या समीकरणात

X हे विसंबित चल आहे. म्हणजेच याचे मूल्य Y वर अवलंबून असते.

Y हे स्वतंत्र चल आहे म्हणजेच या आधारे आपण Y चे मूल्य दिलेले असताना X चे मूल्य काढू शकतो.

a हा X-आंतरखंड आहे कारण याचे मूल्य हे प्रतिपगमन रेषा ज्या ठिकाणी X-अक्षाला म्हणजेच आडव्या अक्षाला छेदते त्या बिंदूला असते.

b - रेषेचा उतार आहे जो Y चलामध्ये एकक बदल झाल्यामुळे X चलात होणारा बदल दर्शवितो.

a आणि *b* या दोन स्थियंकाची मूल्ये काढण्यासाठी पुढील दोन सामान्य समीकरणे एकसामाईकपणे सोडविली पाहिजे.

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$$

$$\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2$$

या समीकरणाला सामान्य समीकरणे असे म्हणतात.

या समीकरणात $\sum X$, $\sum Y$, $\sum XY$ आणि $\sum Y^2$ एकूण बेरीज दर्शवितात जी X आणि Y या दोन चलाच्या मूल्याच्या जोड्यापासून काढता येतात आणि n ही मूल्यांच्या जोड्यांची संख्या आहे.

उदाहरण : पुढील दिलेल्या सामग्रीच्या सहाय्याने दोन प्रतिपगमन समीकरणे काढा आणि Y चे मूल्य 9 असताना X चे मूल्य प्राककलन करा आणि X चे मूल्य 10 असताना Y चे मूल्य प्राककलन करा.

X	5	7	8	9	6
Y	2	3	6	5	4

उत्तर :

X	Y	X^2	Y^2	XY
5	2	25	4	10
7	3	49	9	21
8	6	64	36	48
9	5	81	25	45
6	4	36	16	24
35	20	255	90	148

वरील तक्त्यावरून

$\sum X = 35$, $\sum Y = 20$, $\sum X^2 = 255$, $\sum Y^2 = 90$, $\sum XY = 148$ आणि $n = 5$.

(१) Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$Y = a + bX$$

वरील समीकरणातील a आणि b च्या किंमती काढण्यासाठी पुढील सामान्य समीकरणांचा वापर करावा लागतो.

$$\sum Y = na + b\sum X \quad \text{.... (i)}$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2 \quad \text{.... (ii)}$$

वरील समीकरणांमध्ये तक्त्यावरून मिळालेल्या किंमती ठेवून

$$20 = 5a + 35b \quad \text{.... (iii)}$$

$$148 = 35a + 255b \quad \text{.... (iv)}$$

वरील समीकरणे a आणि b साठी एकसामाईकपणे सोडविता येतील. समीकरण (iii) ला 7 ने गुणाकार करून

$$140 = 35a + 245b \quad \text{.... (v)}$$

समीकरण (v) समीकरण (ii) मधुन वजा करून

$$148 = 35a + 255b$$

$$140 = 35a + 245b$$

$$-\quad\quad -\quad\quad -$$

$$8 = 0 + 10b$$

$$10b = 8$$

$$b = \frac{8}{10}$$

$$\therefore b = 0.8$$

b = 0.8 हि किंमत समीकरण (iii) मध्ये ठेवून

$$20 = 5a + 35b$$

$$20 = 5a + 35\ (0.8)$$

$$20 = 5a + 28$$

$$5a = 20 - 28$$

$$5a = -8$$

$$a = \frac{-8}{5}$$

$\therefore\ a = -1.6$

$a = -1.6$ आणि $b = 0.8$ या किंमती $Y = a + bX$ या समीकरणात ठेवून

$Y = -1.6 + 0.8X$

वरील समीकरणात जर $X = 10$ ठेवले तर

$Y = -1.6 + 0.8\ (10)$

$Y = -1.6 + 8$

$\therefore\ Y = 6.4.$

(२) X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरण

$X = a + bY$

वरील समीकरणातील a आणि b च्या किंमती काढण्यासाठी पुढील सामान्य समीकरणांचा वापर करून

$$\sum X = na + b\sum Y \qquad \text{... (i)}$$

$$\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2 \qquad \text{... (ii)}$$

वरील समीकरणांमध्ये तक्त्यावरून मिळालेल्या किंमती ठेवून

$35 = 5a + 20b$ ... (iii)

$148 = 20a + 90b$ ... (iv)

वरील समीकरणे a आणि b साठी एकसामाईकपणे सोडविता येतील.

समीकरण (iii) ला 4 ने गुणाकार करून.

$140 = 2a + 80b$ ... (v)

समीकरण (v) समीकरण (iv) मधून वजा करून

$148 = 20a + 90b$

$140 = 20a + 80b$

$8 = 0 + 10b$

$10b = 8$

$$b = \frac{8}{10}$$

$\therefore b = 0.8$

$b = 0.8$ ही किंमत समीकरण (iii) मध्ये ठेवून.

$35 = 5a + 20b$

$35 = 5a + 20\ (0.8)$

$35 = 5a + 16$

$5a = 35 - 16$

$5a = 19$

$$a = \frac{19}{5}$$

$\therefore a = 3.8$

$a = 3.8$ आणि $b = 0.8$ या किंमती समीकरण $X = a + bY$ मध्ये ठेवून

$X = 3.8 + 0.8\ Y$

वरील समीकरणात जर $Y = 9$ ठेवले तर

$X = 3.8 + 0.8\ (9)$

$X = 3.8 + 7.2$

$\therefore X = 11$

उदाहरण : पुढील दिलेल्या माहितीच्या सहाय्याने न्यूनत्तम वर्ग पद्धती वापरून दोन प्रतिपगमन रेषा काढा.

X	2	4	6	8	10
Y	5	7	9	8	11

उत्तर :

X	**Y**	**X^2**	**Y^2**	**XY**
2	5	4	25	10
4	7	16	49	28
6	9	36	81	54
8	8	64	64	64
10	11	100	121	110
30	40	220	340	266

वरील तक्त्यावरून

$\sum X = 30$, $\sum Y = 40$, $\sum X^2 = 220$, $\sum Y^2 = 340$, $\sum XY = 266$ आणि n = 5.

(१) Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$Y = a + bX$$

वरील समीकरणातील a आणि b च्या किंमती काढण्यासाठी पुढील सामान्य समीकरणांचा वापर करावा लागतो.

$$\sum Y = na + b\sum X \qquad \text{... (i)}$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2 \qquad \text{... (ii)}$$

वरील समीकरणांमध्ये तक्त्यावरून मिळालेल्या किंमती ठेवून

$40 = 5a + 30b$ .... (iii)

$266 = 30a + 220b$ .... (iv)

वरील समीकरणे a आणि b साठी एकसामाईकपणे सोडविता येतील.

समीकरण (iii) ला 6 ने गुणाकार करून.

$240 = 30a + 180b$ .... (v)

समीकरण (v) समीकरण (iv) मधून वजा करून

$$\begin{array}{rcrcr} 266 & = & 30a & + & 220b \\ 240 & = & 30a & + & 180b \\ - & & - & & - \\ \hline 26 & = & 0 & + & 40b \end{array}$$

$40b = 26$

$$b = \frac{26}{40}$$

$\therefore b = 0.65.$

b = 0.65 हि किंमत समीकरण (iii) मध्ये ठेवून.

$40 = 5a + 30b$

$40 = 5a + 30\ (0.65)$

$40 = 5a + 19.5$

$5a = 40 - 19.5$

$5a = 20.5$

$$a = \frac{20.5}{5}$$

$\therefore a = 4.1$

$a = 4.1$ आणि $b = 0.65$ या किंमती $Y = a + bX$ या समीकरणात ठेवून.

$Y = 4.1 + 0.65\ X$

(२) X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरण

$X = a + bY$

वरील समीकरणातील a आणि b च्या किंमती काढण्यासाठी पुढील सामान्य समीकरणाचा वापर करून

$\sum X = na + b\sum Y$ ... (i)

$\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2$ ... (ii)

वरील समीकरणांमध्ये तक्त्यावरून मिळालेल्या किंमती ठेवून

$30 = 5a + 40b$ ... (iii)

$266 = 40a + 340b$ ... (iv)

वरील समीकरणे a आणि b साठी एकसामाईकपणे सोडविता येतील.

समीकरण (iii) ला 8 ने गुणाकार करून

$240 = 40a + 320b$ ... (v)

समीकरण (v) समीकरण (iv) मधून वजा करून

$$\begin{array}{rcl} 266 &=& 40a + 340b \\ 240 &=& 40a + 320b \\ - && - \quad\; - \\ \hline 26 &=& 0 + 20b \end{array}$$

$20b = 26$

$$b = \frac{26}{20}$$

$\therefore\ b = 1.3$

$b = 1.3$ हि किंमत समीकरण (iii) मध्ये ठेवून

$30 = 5a + 40b$

$30 = 5a + 40\ (1.3)$

$30 = 5a + 52$

$5a = 30 - 52$

$5a = -22$

$$a = \frac{-22}{5}$$

$\therefore a = -4.4$

$a = -4.4$ आणि $b = 1.3$ या किंमती $X = a + bY$ या समीकरणात ठेवून

$X = -4.4 + 1.3\ Y$

X आणि Y च्या गणितीय माध्यापासून विचलन घेऊन प्रतिपगमन समीकरण काढणे

प्रतिपगमन समीकरण सोडविण्याची न्यूनत्तम वर्ग पद्धती ही अत्यंत किचकट आणि क्लिष्ट आहे. त्यामुळे या पद्धतीचा प्रतिपगमन समीकरण सोडविण्यासाठी जास्त उपयोग केला जात नाही. त्याऐवजी X आणि Y चलाच्या गणितीय माध्यापासून विचलने घेऊन प्रतिपगमन समीकरणे सोडविली जातात. या पद्धतीनुसार प्रतिपगमन समीकरणे काढण्याची प्रक्रिया पुढील प्रमाणे आहे.

(१) X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरण

X आणि Y चलाच्या गणितीय माध्यापासून विचलने घेऊन X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरण पुढील सुत्राचा उपयोग करून काढले जाते.

$$(X - \overline{X}) = b_{xy}(Y - \overline{Y})$$

$$(X - \overline{X}) = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \overline{Y})$$

सुत्रामध्ये, $\overline{X}$ = X श्रेणीचे गणितीय माध्य आहे

$\overline{Y}$ = Y श्रेणीचे गणितीय माध्य आहे

$b_{xy} = r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ - X चलाचा Y चलावरील प्रतिपगमन गुणांक

r = X आणि Y चलातील सहसंबंध गुणांक

σ_x आणि σ_y = X आणि Y चलाच्या श्रेणीचे प्रमाण विचलन.

X आणि Y चलाच्या गणितीय माध्यापासून विचलने घेऊन X चलाचा Y चलावरील प्रतिपगमन गुणांक पुढील सुत्राच्या सहाय्याने काढला जातो.

$$b_{xy} \text{ किंवा } r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum xy}{\sum y^2} = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \cdot \sum Y}{N}}{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}}$$

येथे $x = (X - \overline{X})$ आणि $y = (Y - \overline{Y})$

म्हणून r, σ_x आणि σ_y ची मूल्ये काढण्याऐवजी आपण प्रत्यक्षपणे प्रतिपगमन गुणांक (b_{xy}) $\sum XY$ आणि $\sum Y^2$ चे मूल्ये काढून त्यांचा भागाकार घेऊन काढू शकतो.

(२) Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

X आणि Y चलाच्या गणितीय माध्यापासून विचलने घेऊन Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण पुढील सुत्राचा उपयोग करून काढले जाते.

$$(Y - \overline{Y}) = b_{yx}(X - \overline{X})$$

$$(Y - \overline{Y}) = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \overline{X})$$

सुत्रामध्ये, $\overline{X}$ = Y श्रेणीचे गणितीय माध्य आहे

$\overline{Y}$ = X श्रेणीचे गणितीय माध्य आहे.

$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ = Y चलाचा X चलावरील प्रतिपगमन गुणांक

r = X आणि Y चलातील सहसंबंध गुणांक

σ_x आणि σ_y = X आणि Y चलाच्या श्रेणीचे प्रमाण विचलन.

X आणि Y चलाच्या गणितीय माध्यापासून विचलने घेऊन Y चलाचा X चलावरील प्रतिपगमन गुणांक पुढील सुत्राच्या सहाय्याने काढला जातो.

$$b_{xy} \text{ किंवा } r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{\sum XY - \frac{\sum X\cdot\sum Y}{N}}{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}$$

येथे $x = (X - \overline{X})$ आणि $y = (Y - \overline{Y})$

म्हणून r, σ_x आणि σ_y ची मूल्ये काढण्याऐवजी आपण प्रत्यक्षपणे प्रतिपगमन गुणांक (b_{yx}) $\sum xy$ आणि $\sum x^2$ चे मूल्ये काढून त्यांचा भागाकार घेऊन काढू शकतो.

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे X आणि Y श्रेणीच्या गणितीय माध्यापासून विचलने घेऊन दोन प्रतिपगमन समीकरणे काढा.

X	4	6	8	10	12
Y	7	9	11	10	13

उत्तर :

X	**Y**	$x = (X - \overline{X})$	$y = (Y - \overline{Y})$	x^2	y^2	xy
4	7	– 4	– 3	16	9	12
6	9	– 2	– 1	4	1	2
8	11	0	1	0	1	0
10	10	2	0	4	0	0
12	13	4	3	16	9	12
40	50	0	0	40	20	26

सर्वप्रथम X आणि Y चलाचे गणितीय माध्य काढा.

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{50}{5} = 10$$

वरील तक्त्यावरून

$\sum X^2 = 40$, $\sum Y^2 = 20$, $\sum XY = 26$.

X चा Y वरील प्रतिपगमन गुणांक

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum xy}{\sum y^2}$$

$$= \frac{26}{20}$$

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 1.3$$

Y चा X वरील प्रतिपगमन गुणांक

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

$$= \frac{26}{40}$$

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0.65$$

X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$\left(X-\overline{X}\right)=b_{xy}\left(Y-\overline{Y}\right)$$

$$(X - 8) = 1.3\ (Y - 10)$$

$$X - 8 = 1.3Y - 13$$

$$X = 1.3Y - 13 + 8$$

$$Y = - 5 + 1.3Y$$

Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$\left(Y-\overline{Y}\right)=b_{yx}\left(X-\overline{X}\right)$$

$$Y - 10 = 0.65\ (X - 8)$$

$$Y - 10 = 0.65X - 5.2$$

$$Y = 0.65X - 5.2 + 10$$

$$X = 4.8 + 0.65X$$

उदाहरण : एका डिपार्टमेंट स्टोअर ने आपल्या सेल्समनला सेवा अंतर्गत प्रशिक्षण दिले आणि त्यानंतर त्यांची परिक्षा घेतली. सेल्समनने परिक्षेत मिळविलेले गुण आणि त्यांनी केलेली विक्री पुढील प्रमाणे आहे. त्याआधारे दोन प्रतिपगमन समीकरणे काढा.

परिक्षेतील गुण	14	19	24	21	26	22	15	20	19
विक्री ('००० रू.)	31	36	48	37	50	45	33	41	39

उत्तर : समजा परिक्षेतील गुण म्हणजे X आणि विक्री म्हणजे Y.

$$\overline{X}=\frac{\sum x}{N}=\frac{180}{9}=20$$

$$\overline{Y}=\frac{\sum y}{N}=\frac{360}{9}=40$$

X	Y	$x = (X - \overline{X})$	$y = (Y - \overline{Y})$	x^2	y^2	xy
14	31	– 6	– 9	36	81	54
19	36	– 1	– 4	1	16	4
24	48	4	8	16	64	32
21	37	1	– 3	1	9	– 3
26	50	6	10	36	100	60
22	45	2	5	4	25	10
15	33	– 5	– 7	25	49	35
20	41	0	1	0	1	0
19	39	– 1	– 1	1	1	1
180	360	0	0	120	346	193

वरील तक्त्यावरून

$\sum x^2 = 120$, $\sum y^2 = 346$, $\sum xy = 193$.

X चा Y वरील प्रतिपगमन गुणांक

$$b_{xy} = \frac{\sum xy}{\sum y^2} = \frac{193}{346} = 0.56$$

Y चा X वरील प्रतिपगमन

$$b_{yx} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{193}{120} = 1.60$$

परिक्षेतील गुणाचे (X) चे विक्री (Y) वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$(X - \overline{X}) = b_{xy} (Y - \overline{Y})$$

$$(X - 20) = 0.56\ (Y - 40)$$

$$X - 20 = 0.56Y - 22..4$$

$$X = 0.56Y - 22.4 + 20$$

$$X = - 2.4 + 56.Y$$

विक्रीचे (Y) परिक्षेतील गुण (X) वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$(Y - \overline{Y}) = b_{yx}(X - \overline{X})$$

$$Y - 40 = 1.6 (X - 20)$$

$$Y - 40 = 1.6X - 32$$

$$Y = 1.6X - 32 + 40$$

$$Y = 8 + 1.6X$$

उदाहरण : खालील दिलेल्या आकडेवारीच्या सहाय्याने दोन प्रतिपगमन समीकरणे काढा.

X	6	2	10	4	8
Y	9	11	5	8	7

उत्तर :

X	**Y**	***X^2***	***Y^2***	***XY***
6	9	36	81	54
2	11	4	121	22
10	5	100	25	50
4	8	16	64	32
8	7	64	49	56
30	40	220	340	214

वरील तक्त्यावरून

$\sum X = 30$, $\sum Y = 40$, $\sum X^2 = 220$, $\sum Y^2 = 340$, $\sum Y^2 = 340$, $\sum XY = 214$.

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{40}{5} = 8$$

X चा Y वरील प्रतिपगमन गुणांक

$$b_{xy} = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \cdot \sum Y}{N}}{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}}$$

$$b_{xy} = \frac{214 - \frac{30 \times 40}{5}}{340 - \frac{(40)^2}{5}}$$

$$= \frac{214 - \frac{1200}{5}}{340 - \frac{1600}{5}}$$

$$= \frac{214 - 240}{340 - 320}$$

$$= \frac{-26}{20}$$

$$b_{xy} = -\ 1.3$$

Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$b_{yx} = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \cdot \sum Y}{N}}{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}$$

$$= \frac{214 - \frac{30 \times 40}{5}}{220 - \frac{(30)^2}{5}}$$

$$= \frac{214 - \frac{1200}{5}}{220 - \frac{900}{5}}$$

$$= \frac{214 - 240}{220 - 180}$$

$$= \frac{-26}{40}$$

$b_{yx} = -\ 0.65$

X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$(X - \overline{X}) = b_{xy}(Y - \overline{Y})$$

$(X - 6) = -\ 1.3\ (Y - 8)$

$X - 6 = -\ 1.3Y + 10.4$

$X = -\ 1.3Y + 10.4 + 6$

$X = 16.4 - 1.3Y$

Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$(Y - \overline{Y}) = b_{yx}(X - \overline{X})$$

$(Y - 8) = -\ 0.65\ (X - 6)$

$Y - 8 = -\ 0.65X + 3.9$

$Y = -\ 0.65X + 3.9 + 8$

$Y = 11.9 - 0.65X$

गृहीत माध्यापासून विचलन घेऊन प्रतिपगमन समीकरण काढणे

X आणि Y चलाचे गणितीय माध्य जेव्हा अपूर्णांकात येतात तेंव्हा वरील पद्धतीच्या सहाय्याने प्रतिपगमन समीकरणे काढणे किचकट आणि क्लिष्ट होते. अशावेळी प्रत्यक्ष गणितीय माध्यापासून विचलने न घेता गृहीत माध्यापासून विचलने घेतली पाहिजेत आणि त्यानंतर प्रतिपगमन समीकरणे काढली पाहिजेत.

X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$(X-\overline{X}) = b_{xy}(Y-\overline{Y})$$

येथे, $\overline{X}$ - X श्रेणीचे गणितीय माध्य आहे

$\overline{Y}$ - Y श्रेणीचे गणितीय माध्य आहे

b_{xy} - X चलाचा Y चलावरील प्रतिपगमन गुणांक

X आणि Y चलाचे गृहीत माध्यापासून विचलने घेऊन X चलाचा Y चलावरील प्रतिपगमन गुणांक पुढील सुत्राच्या सहाय्याने काढला जातो.

$$b_{xy} = \frac{\sum dXdY - \frac{\sum dX \cdot \sum dY}{N}}{\sum dY^2 - \frac{(\sum dY)^2}{N}}$$

येथे, $dx = X - A_X$

$dy = Y - A_Y$

Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$(Y-\overline{Y}) = b_{yx}(X-\overline{X})$$

येथे $\overline{X}$ - X श्रेणीचे गणितीय माध्य आहे

$\overline{Y}$ - Y श्रेणीचे गणितीय माध्य आहे

b_{yx} – Y चलाचा X चलावरील प्रतिपगमन गुणांक

X आणि Y चलाचे गृहीत माध्यापासून विचलने घेऊन Y चलाचा X चलावरील प्रतिगमन गुणांक पुढील सुत्राच्या सहाय्याने काढला जातो.

$$b_{yx} = \frac{\sum dXdY - \frac{\sum dX \cdot \sum dY}{N}}{\sum dY^2 - \frac{(\sum dX)^2}{N}}$$

येथे, $dx = X - A_X$

$dy = Y - A_Y$

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे दोन प्रतिपगमन समीकरणे काढा.

X	1	2	3	5	8
Y	10	12	15	18	20

उत्तर : X श्रेणीसाठी 3 हे गृहीत माध्य आणि

Y श्रेणीसाठी 15 हे गृहीत माध्य मानून

X	**Y**	***dX***	***dY***	***dX²***	***dY²***	***dXdY***
1	10	– 2	– 5	4	25	10
2	12	– 1	– 3	1	9	3
3	15	0	0	0	0	0
5	18	2	3	4	9	6
8	20	5	5	25	25	25
19	75	4	0	34	68	44

वरून तक्त्यावरून

$\sum dX = 4$, $\sum dY = 0$, $\sum dX^2 = 34$, $\sum dY^2 = 68$, $\sum dXdY = 44$.

$\overline{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$ $\qquad$ $\overline{Y} = A + \frac{\sum dy}{N}$

$= 3 + \frac{4}{5}$ $\qquad$ $= 15 + \frac{0}{5}$

$= 3 + 0.8$ $\qquad$ $= 15 + 0$

$\overline{X} = 3.8$ $\qquad$ $\overline{Y} = 15$

X चा Y वरील प्रतिपगमन गुणांक

$$b_{xy} = \frac{\sum dXdY - \frac{\sum dX \cdot \sum dY}{N}}{\sum dY^2 - \frac{(\sum dY)^2}{N}}$$

$$= \frac{44 - \frac{4 \times 0}{5}}{68 - \frac{(0)^2}{5}}$$

$$= \frac{44 - 0}{68 - 0}$$

$$= \frac{44}{68}$$

$b_{xy} = 0.64.$

Y चा X वरील प्रतिपगमन गुणांक

$$b_{yx} = \frac{\sum dXdY - \frac{\sum dX \cdot \sum dY}{N}}{\sum dX^2 - \frac{(\sum dX)^2}{N}}$$

$$b_{yx} = \frac{44 - \frac{4 \times 0}{5}}{34 - \frac{(4)^2}{5}}$$

$$= \frac{44 - 0}{34 - \frac{16}{5}}$$

$$= \frac{44 - 0}{34 - 3.2}$$

$$= \frac{44}{30.8}$$

b_{yx} = 1.42

X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$\left(X - \overline{X}\right) = b_{xy}\left(Y - \overline{Y}\right)$$

(X – 3.8) = 0.64 (Y – 15)

X – 3.8 = 0.64Y – 9.6

X = 0.64Y – 9.6 + 3.8

X = – 5.8 + 0.64Y

Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$\left(Y - \overline{Y}\right) = b_{yx}\left(X - \overline{X}\right)$$

(Y – 15) = 1.42 (X - 3.8)

Y – 15 = 1.42X – 5.39

Y = 1.42X – 5.39 + 15

Y = 9.61 + 1.42X

उदाहरण : पुढील दिलेल्या पुरवठा आणि किंमतीच्या माहितीवरून पुरवठ्याचे किंमतीवर आणि किंमतीचे पुरवठ्यावरील प्रतिपगमन समीकरणे तयार करा.

पुरवठा	70	72	76	81	73	85	79	86	83	80
किंमत	140	145	130	125	130	130	120	115	120	118

उत्तर : समजा पुरवठा म्हणजे X आणि किंमत म्हणजे Y.

X	Y	$dX_{(75)}$	$dY_{(130)}$	dX^2	dY^2	$dXdY$
70	140	– 5	10	25	100	– 50
72	145	– 3	15	9	225	– 45
76	130	1	0	1	0	0
81	125	6	– 5	36	25	– 30
73	130	– 2	0	4	0	0
75	130	0	0	0	0	0
79	120	4	– 10	16	100	– 40
86	115	11	– 15	121	225	– 165
83	120	8	– 10	64	100	– 80
80	118	5	– 12	25	144	– 60
		25	– 27	301	919	– 460

वरील तक्त्यावरून

$\sum dX = 25, \sum dY = -27, \sum dX^2 = 301, \sum dY^2 = 919, \sum dXdY = -460$, N = 10.

X चा Y वरील प्रतिपगमन गुणांक

$$b_{xy} = \frac{\sum dXdY - \frac{\sum dX \cdot \sum dY}{N}}{\sum dY^2 - \frac{(\sum dY)^2}{N}}$$

$$b_{xy} = \frac{-460 - \frac{25 \times -27}{10}}{919 - \frac{(-27)^2}{10}}$$

$$= \frac{-460 + \frac{675}{10}}{919 - \frac{729}{10}}$$

$$= \frac{-460 + 67.5}{919 - 72.9}$$

$$= \frac{-392.5}{846.1}$$

$$b_{xy} = -\ 0.46$$

Y चा X वरील प्रतिपगमन गुणांक

$$b_{yx} = \frac{\sum dXdY - \frac{\sum dX \cdot \sum dY}{N}}{\sum dX^2 - \frac{(\sum dX)^2}{N}}$$

$$b_{yx} = \frac{-460 - \frac{25 \times -27}{10}}{301 - \frac{(25)^2}{10}}$$

$$= \frac{-460 + \frac{675}{10}}{301 - \frac{625}{10}}$$

$$= \frac{-460 + 67.5}{301 - 62.5}$$

$$= \frac{-392.5}{238.5}$$

b_{yx} = – 1.64

$$\overline{X} = A + \frac{\sum dX}{N} = 75 + \frac{25}{10} = 75 + 2.5 = 77.5$$

$$\overline{Y} = A + \frac{\sum dY}{N} = 130 + \frac{-27}{10} = 130 - 2.7 = 127.3$$

Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$(X - \overline{X}) = b_{xy}(Y - \overline{Y})$$

(X – 77.5) = – 0.46 (Y – 127.3)

X – 77.5 = – 0.46Y + 58.56

X = – 0.46Y + 58.56 + 77.5

X = 136.06 – 0.46Y

X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$(Y - \overline{Y}) = b_{yx}(X - \overline{X})$$

(Y – 127.3) = – 1.64 (X – 77.5)

Y – 127.3 = – 1.64X + 127.1

Y = – 1.64X + 127.1 + 127.3

Y = 254.4 – 1.64X

$\therefore$ पुरवठ्याचे किंमतीवरील प्रतिपगमन समीकरण

$$X = 136.06 - 0.46Y$$

आणि किंमतीचे पुरवठ्यावरील प्रतिपगमन समीकरण

$$Y = 254.4 - 1.64X$$

४.४.१ प्रतिपगमन गुणांकाचे गुणधर्म

१. प्रतिपगमन गुणांक b_{xy} आणि b_{yx} चे काही महत्त्वपूर्ण गुणधर्म आहेत ते पुढीलप्रमाणे आहेत. b_{xy} आणि b_{yx} च्या भूमितीय माध्यापासून सहसंबंध गुणांकाचे मूल्य मिळते.

याचा अर्थ असा की,

$$r = \sqrt{b_{xy} \cdot b_{yx}}$$

हे पुढीलप्रमाणे सहज सिद्ध करता येईल.

आपणास माहित आहे की,

$$b_{xy} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad \text{आणि} \quad b_{yx} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$\therefore b_{xy} \times b_{yx} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \times r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = r^2$$ जे नेहमी धन असते.

$$\therefore b_{xy} \times b_{yx} = r^2$$

$$\therefore r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$$

२. दोन प्रतिपगमन गुणांकाचा गुणाकार हा नेहमी धन असल्यामुळे दोन्ही प्रतिपगमन गुणाांकाचे गणितीय चिन्ह समान असते.

दोन्ही प्रतिपगमन गुणांक हे एकतर धन असतात किंवा दोन्ही प्रतिपगमन गुणांक हे ऋण असतात. एका प्रतिपगमन गुणांकाचे चिन्ह धन आहे आणि दुसऱ्या प्रतिपगमन गुणांकाचे

चिन्ह ऋण असणे शक्य नाही. याचे कारण असे की, प्रमाण विचलनाच्या बाबतीत जर आपण पाहिले तर ते नेहमी धन असते. फक्त सहसंबंध गुणांक हा एकतर धन किंवा ऋण असतो. म्हणून या कारणाने $b_{xy} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ आणि $b_{yx} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ यांच्या गणितीय चिन्हांचे निर्धारण r च्या चिन्हावरून होते. जर r धन असेल तर b_{xy} आणि b_{yx} हे दोन्ही धन असतात आणि जर r ऋण असेल तर b_{xy} आणि b_{yx} हे दोन्ही ऋण असतात. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास, जर दोन्ही प्रतिपगमन गुणांक हे धन असतील तर r हे धन असते आणि जर दोन्ही प्रतिपगमन गुणांक हे ऋण असतील तर r हे ऋण असते.

३. b_{xy} आणि b_{yx} या दोन्ही प्रतिपगमन गुणांकाचे मूल्य एक पेक्षा जास्त नसते. या दोन पैकी कोणत्याही एकाचे मूल्य एक पेक्षा जास्त असते परंतु दोघांचेही नाही. याचे कारण असे की, $r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$ आणि जर b_{xy} आणि b_{yx} हे दोन्ही एक पेक्षा जास्त असतील तर सहसंबंध गुणांक (r) हा सुद्धा एक पेक्षा जास्त असेल जे कधीच शक्य नाही.

४.४.२ प्रतिपगमन रेषेचे गुणधर्म

प्रतिपगमन रेषेचे गुणधर्म पुढील प्रमाणे आहेत.

१. X चे गणितीय माध्य आणि Y चे गणितीय माध्य हे प्रतिपगमन रेषावर असतात.

दोन प्रतिपगमन रेषांची समीकरणे पुढीलप्रमाणे आहेत.

$$(X - \overline{X}) = b_{xy}(Y - \overline{Y}) \text{ आणि } (Y - \overline{Y}) = b_{yx}(X - \overline{X})$$

यावरून हे स्पष्ट होते की, X चे माध्य आणि Y चे माध्य हे प्रतिपगमन रेषेवर असतात.

जर प्रतिपगमन समीकरणे दिलेली आहेत त्यावरून X चे माध्य आणि Y चे माध्य काढण्यासाठी आपणास दोन्ही प्रतिपगमन समीकरणे X आणि Y साठी एकसामाईकपणे सोडविल्यास जे X आणि Y चे मूल्य मिळते ते X चे माध्या आणि Y चे माध्य असते.

२. जर r = 0 असेल तर दोन प्रतिपगमन रेषा एकमेकांना लंब असतात.

दोन प्रतिपगमन रेषांची समीकरणे पुढीलप्रमाणे आहेत.

$$(X-\overline{X}) = b_{xy}(Y-\overline{Y}) = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\overline{Y})$$ आणि

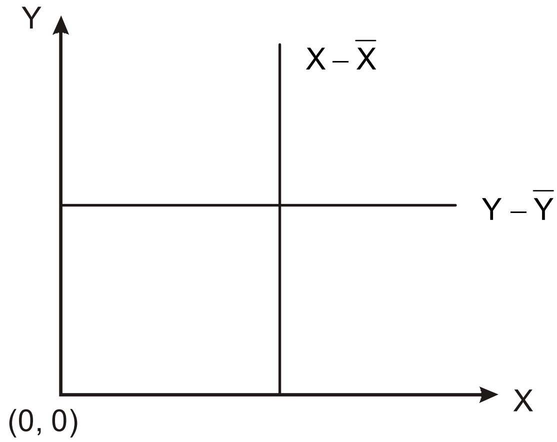
$$(Y-\overline{Y}) = b_{yx}(X-\overline{X}) = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X})$$

जर $r = 0$ असेल तर दोन प्रतिपगमन समीकरणामध्ये पुढीलप्रमाणे बदल होईल.

$X-\overline{X}=0$ आणि $Y-\overline{Y}=0$

यावरून, $X-\overline{X}$ आणि $Y-\overline{Y}$

पुढील आलेखावरून हे स्पष्ट होते की, $Y-\overline{Y}$ आणि $X-\overline{X}$ हे एकमेकांना लंब असतात.



आकृती

३. जर दोन्ही प्रतिपगमन रेषा समान असतील तर दोन चलामध्ये पूर्ण सहसंबंध असतो. दोन प्रतिपगमन रेषांची समीकरणे पुढील प्रमाणे आहेत.

$$(Y-\overline{Y}) = b_{yx}(X-\overline{X}) \quad \text{... (i)}$$

$$(X-\overline{X}) = b_{xy}(Y-\overline{Y}) \quad \text{... (ii)}$$

समीकरण (ii) वरून

$$\left(Y-\overline{Y}\right)=\frac{\left(X-\overline{X}\right)}{b_{xy}}$$

जर दोन्ही प्रतिपगमन रेषा समान असतील तर समीकरण (i) आणि (ii) वरून $\left(Y-\overline{Y}\right)$ चे काढलेले मूल्य समान असले पाहिजे.

$$Y-\overline{Y}=b_{yx}\left(X-\overline{X}\right)=\frac{\left(X-\overline{X}\right)}{b_{xy}}$$

म्हणजेच $b_{yx}\left(X-\overline{X}\right)=\frac{\left(X-\overline{X}\right)}{b_{xy}}$

$$\Rightarrow b_{xy}\times b_{yx}=\frac{\left(X-\overline{X}\right)}{\left(X-\overline{X}\right)}=1$$

$$\Rightarrow r^2=1$$

$$\Rightarrow r=\pm 1$$

$\therefore$ सहसंबंध हा पूर्ण सहसंबंध आहे.

जर दोन प्रतिपगमन रेषा समान असतील तर दोन चलामध्ये पूर्ण सहसंबंध असतो, एकतर पूर्ण धन किंवा पूर्ण ऋण सहसंबंध असतो.

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे दोन प्रतिपगमन समीकरणे काढा.

	X	Y
माध्य (Mean)	40	45
प्रमाण विचलन	10	9

X आणि Y या दोन चलातील सहसंबंध गुणांक 0.50 आहे. तसेच X = 40 असताना Y चे अपेक्षित किंवा अंदाजित मूल्य काढा.

उत्तर : दिलेली माहिती

$\overline{X} = 40$, $\overline{Y} = 45$, $\sigma_x = 10$, $\sigma_y = 9$, $r = 0.50$

X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$(X - \overline{X}) = b_{xy}(Y - \overline{Y})$$

$$b_{xy} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$= 0.50 \times \frac{10}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

$b_{xy} = 0.55$

$(X - 40) = 0.55\ (Y - 45)$

$X - 40 = 0.55Y - 24.75$

$X = 0.55Y - 24.75 + 40$

$\therefore X = 15.25 + 0.55Y$

Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$(Y - \overline{Y}) = b_{yx}(X - \overline{X})$$

$$b_{yx} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$= 0.50 \times \frac{9}{10}$$

$$= \frac{4.5}{10}$$

$$b_{yx} = 0.45$$

$$(Y - 45) = 0.45\ (X - 40)$$

$$Y - 45 = 0.45X - 18$$

$$Y = 0.45X - 18 + 45$$

$$Y = 27 + 0.45X$$

जर X = 40 असेल तर

$$Y = 27 + 0.45\ (4)$$

$$Y = 27 + 18$$

$$\therefore Y = 45$$

$\therefore$ X = 40 असताना Y चे अपेक्षित मूल्य 45 असेल.

उदाहरण : पुढील माहितीच्या आधारे 40 cm पर्जन्यमान असताना संबंधित अपेक्षित उत्पन्न काढा.

	पर्जन्यमान (cm मध्ये)	उत्पादन (क्विंटल)
सरासरी	30	50
प्रमाण विचलन	45	10
सहसंबंध गुणांक = 0.8		

उत्तर : समजा पर्जन्यमान म्हणजे X आणि उत्पादन म्हणजे Y या आधारे अपेक्षित उत्पादन Y च्या X वरील प्रतिपगमन रेषेवरून काढता येईल.

Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$b_{yx} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$= 0.8 \times \frac{10}{5}$$

$$= \frac{8}{5}$$

$$b_{yx} = 1.6$$

$$(Y - \overline{Y}) = b_{yx}(X - \overline{X})$$

$$(Y - 50) = 1.6\ (X - 30)$$

$$Y - 50 = 1.6X - 48$$

$$Y = 1.6X - 48 + 50$$

$$Y = 2 + 1.6X$$

जेंव्हा पर्जन्यमान 40 cm असताना उत्पादन पुढील प्रमाणे असेल

$$Y = 2 + 1.6\ (40)$$

$$Y = 2 + 64$$

Y = 66 क्विंटल

४.५ प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटी

प्रतिपगमन समीकरणाच्या सहाय्याने निश्चित परिपूर्ण असा अंदाज किंवा आकलन किंवा भविष्यवाणी करणे व्यावहारीकदृष्ट्या अशक्य असते. उदाहरणार्थ एखाद्या वस्तूची एका वर्षातील मागणी (Y) संबंधित वस्तूच्या किंमतीवर (X) अवलंबून आहे. समजा जेव्हा वस्तूची किंमत 40 रू. आहे तेव्हा अंदाजित किंवा अपेक्षित मागणी 130 आहे. 130 हा आकडा आपण Y च्या X वरील प्रतिपगमन समीकरणावरून आकलन केलेला आहे. परंतु प्रत्यक्ष व्यवहारामध्ये अपेक्षित मागणी ही 130 पेक्षा जास्त किंवा कमी असु शकते. अशा परिस्थितीमध्ये Y च्या किंवा X च्या प्राककलीत मूल्याची संभाव्य त्रुटी माहिति करणे आवश्यक असते.

यासाठी आपणास एका अशा परिमाणाची गरज आहे जे Y चे X वर आधारीत अंदाज किंवा अनुमान किती तंतोतंत आहे ते दर्शवेल, याउलट ते अनुमान कसे चुकीचे आहे ते सांगेल. या

परिमाणाला प्राककलकाच्या प्रमाण त्रुटी असे म्हणतात. प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटी S_{yx} या चिन्हाने दर्शविले जाते. हि संकल्पना प्रमाण विचलनाच्या संकल्पनेसारखीच आहे. प्रमाण विचलन हे माध्यापासूनचे विचलन मोजते. प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटी हे प्रतिपगमन रेषेपासूनचे विचलन मोजते. प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटी काढण्याचे सुत्र पुढील प्रमाणे आहे.

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y_C)^2}{N}}$$

म्हणजेच $$S_{yx} = \sqrt{\frac{\text{अस्पष्ट विचरण}}{N}}$$

तसेच $$S_{yx} = \sigma_y \sqrt{1 - r^2}$$

येथे S_{yx} हे Y च्या मूल्याच्या Y_C पासूनच्या प्रतिपगमनाची प्रमाण त्रुटी आहे.

हे सुत्र गणना करण्याच्या दृष्टीने संयुक्तीक नाही कारण यात $(Y - Y_C)$ ची गणना करणे आवश्यक असते. प्रमाण त्रुटीचे अधिक संयुक्तीक सुत्र पुढील प्रमाणे आहे.

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\Sigma Y^2 - a\Sigma Y - b\Sigma XY}{N}}$$

X च्या मूल्याच्या X_C पासूनच्या प्रतिपगमनाच्या प्रमाण त्रुटीचे सुत्र पुढीलप्रमाणे आहे.

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\Sigma(X - X_C)^2}{N}}$$

म्हणजेच $$S_{xy} = \sqrt{\frac{\text{अस्पष्ट विचरण}}{N}}$$

तसेच $$S_{xy} = \sigma_x \sqrt{1 - r^2}$$

येथे S_{xy} हे X च्या मूल्याच्या X_C पासूनच्या प्रतिपगमनाची प्रमाण त्रुटी आहे.

हे सुत्र गणना करण्याच्या दृष्टीने संयुक्तीक नाही कारण यात $(X - X_C)$ गणना करणे आवश्यक असते. प्रमाण त्रुटीचे अधिक संयुक्तीक सुत्र पुढील प्रमाणे आहे.

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\sum X^2 - a\sum X - b\sum XY}{N}}$$

प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटी हे प्राककलीत केलेल्या आकड्यांची अचूकता मोजते.

प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटीचे मूल्य जेवढे कमी किंवा छोटे तेवढी प्रतिपगमन रेषा सर्व बिंदूच्या जवळ असते आणि त्या प्रतिपगमन समीकरणाच्या सहाय्याने आपण चांगल्या प्रकारचे प्राककलन करू शकतो.

जर प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटीचे मूल्य शुन्य असेल तेव्हा प्रतिपगमन रेषे बाबतीत कुठल्याही प्रकारचे विचरण नसते आणि सहसंबंध हा पूर्ण असतो.

उदाहरण : दिलेल्या माहितीच्या आधारे दोन प्रतिपगमन रेषा काढा आणि प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटी S_{xy} आणि S_{yx} काढा.

X	6	2	10	4	8
Y	9	11	5	8	7

उत्तर :

X	Y	dX (6)	dY (8)	dX^2	dY^2	$dXdY$
6	9	0	1	0	1	0
2	11	– 4	3	16	9	– 12
10	5	4	– 3	16	9	– 12
4	8	– 2	0	4	0	0
8	7	2	– 1	4	1	– 2
30	40	0	0	40	20	– 26

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{40}{5} = 8$$

वरील तक्त्यावरून

$\sum dX = 0$, $\sum dY = 0$, $\sum dX^2 = 40$, $\sum dY^2 = 20$, $\sum dXdY = -26$ आणि N = 5.

X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$(X - \overline{X}) = b_{xy} (Y - \overline{Y})$$

प्रतिपगमन गुणांक

$$b_{xy} = \frac{\sum dXdY - \frac{\sum dX \cdot \sum dY}{N}}{\sum dY^2 - \frac{(\sum dY)^2}{N}}$$

$$b_{yx} = \frac{-26 - \frac{0 \times 0}{5}}{20 - \frac{(0)^2}{5}}$$

$$= \frac{-26 - 0}{20 - 0}$$

$$= \frac{-26}{20}$$

$b_{xy} = -\ 1.3$

$$(X - \overline{X}) = b_{xy} (Y - \overline{Y})$$

(X – 6) = – 1.3 (Y – 8)

$$(X - 6) = - 1.3Y + 10.4$$

$$X = - 1.3T + 10.4 + 6$$

$$X = 16.4 - 1.3Y$$

Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

$$\left(Y - \overline{Y}\right) = b_{yx}\left(X - \overline{X}\right)$$

प्रतिपगमन गुणांक

$$b_{yx} = \frac{\sum dXdY - \frac{\sum dX \cdot \sum dY}{N}}{\sum dX^2 - \frac{(\sum dX)^2}{N}}$$

$$= \frac{-26 - \frac{0 \times 0}{5}}{40 - \frac{(0)^2}{5}}$$

$$= \frac{-26 - 0}{40 - 0}$$

$$= \frac{-26}{40}$$

$$b_{yx} = - 0.65$$

$$\left(Y - \overline{Y}\right) = b_{yx}\left(X - \overline{X}\right)$$

$$(Y - 8) = - 0.65\ (X - 6)$$

$$Y - 8 = - 0.65X + 3.9$$

$$Y = - 0.65X + 3.9 + 8$$

$$Y = 11.9 - 0.65X$$

वरील प्रतिपगमन समीकरणांचा उपयोग करून दिलेल्या X आणि Y च्या मूल्यांच्या आधारे X_C आणि Y_C चे मूल्य माहित करूया.

X = 16.4 – 1.3Y	Y = 11.9 – 0.65X
X_C = 16.4 – 1.3 (9) = 4.7	Y_C = 11.9 – 0.65 (6) = 8
= 16.4 – 1.3 (11) = 2.1	= 11.9 – 0.65 (2) = 10.6
= 16.4 – 1.3 (5) = 9.9	= 11.9 – 0.65 (10) = 5.4
= 16.4 – 1.3 (8) = 6.0	= 11.9 – 0.65 (4) = 9.3
= 16.4 – 1.3 (7) = 7.3	= 11.9 – 0.65 (8) = 6.7

X	**Y**	X_C	Y_C	$X - X_C$	$Y - Y_C$	$(X - X_C)^2$	$(Y - Y_C)^2$
6	9	4.7	8	1.3	1.0	1.69	1.00
2	11	2.1	10.6	– 0.1	0.4	0.01	0.16
10	5	9.9	5.4	0.1	– 0.4	0.01	0.16
4	8	6.0	9.3	2.0	– 1.3	4.00	1.69
8	7	7.3	6.7	0.7	0.3	0.49	0.09
						6.20	3.10

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\Sigma(X - X_C)^2}{N}} = \sqrt{\frac{6.2}{5}} = \sqrt{1.24} = 1.11$$

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y_C)^2}{N}} = \sqrt{\frac{3.10}{5}} = \sqrt{0.62} = 0.78$$

$\therefore$ S_{xy} = 1.11 आणि S_{yx} = 0.78

उदाहरण : पुढील दिलेल्या माहितीच्या आधारे दोन प्रतिपगमन समीकरणे काढा आणि S_{xy} आणि S_{yx} काढा.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	9	8	10	12	11	13	14	16	15

उत्तर :

X	**Y**	X^2	Y^2	XY
1	9	1	81	9
2	8	4	64	16
3	10	9	100	30
4	12	16	144	48
5	11	25	121	55
6	13	36	169	78
7	14	49	196	98
8	16	64	256	128
9	15	81	225	135
45	108	285	1356	597

वरील तक्त्यावरून

$\sum X = 45$, $\sum Y = 108$, $\sum X^2 = 285$, $\sum Y^2 = 1356$, $\sum XY = 597$, N = 9.

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{45}{9} = 5$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{108}{9} = 12$$

X चे Y वरील प्रतिपगमन रेषा

X चा Y वरील प्रतिपगमन गुणांक

$$b_{xy} = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \cdot \sum Y}{N}}{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}}$$

$$b_{xy} = \frac{597 - \frac{45 \times 108}{9}}{1356 - \frac{(108)^2}{9}}$$

$$b_{xy} = \frac{597 - 540}{1356 - 972}$$

$$b_{xy} = \frac{57}{384}$$

$$b_{xy} = 0.15$$

$$(X - \overline{X}) = b_{xy}(Y - \overline{Y})$$

$(X - 5) = 0.15\ (Y - 12)$

$X - 5 = 0.15Y - 1.8$

$X = 0.15Y - 1.8 + 5$

$\therefore X = 3.2 + 0.15Y$

Y चे X वरील प्रतिपगमन समीकरण

Y चा X वरील प्रतिपगमन गुणांक

$$b_{yx} = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \cdot \sum Y}{N}}{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}$$

$$= \frac{597 - \frac{45 \times 108}{9}}{285 - \frac{(45)^2}{9}}$$

$$= \frac{597 - 540}{285 - 225}$$

$$= \frac{57}{60}$$

$$b_{yx} = 0.95$$

$$(Y - \overline{Y}) = b_{yx}(X - \overline{X})$$

$$(Y - 12) = 0.95\ (X - 5)$$

$$Y - 12 = 0.95X - 4.75$$

$$Y = 7.25 + 0.95X$$

प्राककलनाचे प्रमाण त्रुटी

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\sum X^2 - a\sum X - b\sum XY}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{285 - 3.2(45) - 0.15(597)}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{285 - 144 - 89.55}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{51.45}{9}}$$

$$= \sqrt{5.72}$$

$$S_{xy} = 2.39$$

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a\sum Y - b\sum XY}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{1356 - 7.25(108) - 0.95(597)}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{1356 - 783 - 567.15}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{5.85}{9}}$$

$$= \sqrt{0.65}$$

$$S_{xy} = 0.80$$

आपली प्रगती तपासा - १

दिलेल्या पर्यायातून योग्य पर्याय निवडा.

१. Y = 21 – 3X या प्रतिपगमन समीकरणात उतार ...... आहे.

(अ) 21 (ब) – 21

(क) 3 (ड) – 3

२. Y च्या X वरील प्रतिपगमन समीकरणातील उताराला .... म्हणतात.

(अ) X आणि Y मधील सहसंबंध गुणांक

(ब) Y आणि X मधील सहसंबंध गुणांक

(क) X चा Y वरील प्रतिपगमन गुणांक

(ड) Y चा X वरील प्रतिपगमन गुणांक

३. प्रतिपगमन विश्लेषण ....

(अ) कारण आणि परिणाम प्रस्थापित करते

(ब) दोन चलामधील संबंध प्रस्थापित करते

(क) वृद्धीचे मोजमाप करते

(ड) वस्तूच्या मागणीचे मोजमाप करते

४. जर Y = 16 + 2.5X हे प्रतिपगमन समीकरण आहे तर X = 4 असताना Y चे मूल्य ... असेल ?

(अ) 26 (ब) 16 (क) 2.5 (ड) 66.5

५. जर एक प्रतिपगमन गुणांक हा एक पेक्षा मोठा असेल तर दुसरा प्रतिपगमन गुणांक ...

(अ) एक पेक्षा मोठा असेल (ब) एकच्या बरोबर असेल

(क) एक पेक्षा लहान असेल (ड) ऋण एकच्या बरोबर असेल

आपली प्रगती तपासा - २

एक किंवा दोन वाक्यात उत्तरे द्या.

१. प्रतिपगमन म्हणजे काय ?

२. X चे Y वरील प्रतिपगमन समीकरणातील दोन सामान्य समीकरणे सांगा.

३. प्राककलनाची प्रमाण त्रुटी म्हणजे काय ?

४. प्रतिपगमन गुणांकाचे कोणतेही दोन गुणधर्म सांगा.

५. प्रतिपगमन कोणतेही दोन उपयोग सांगा.

४.६ सारांश

प्रस्तुत घटकामध्ये आपण प्रतिपगमन म्हणजे काय ते अभ्यासले. प्रपिगमनाचे विविध क्षेत्रात असलेले महत्त्व जाणून घेतले. तसेच सहसंबंध आणि प्रपिगमनाची तुलना केली. प्रतिपगमन प्राककलनाच्या विविध पद्धती अभ्यासल्या. प्रतिपगमन समीकरणे अभ्यासली आणि ती कशी मोजली

जातात याचाही सविस्तर अभ्यास केला. प्रतिपगमन गुणांकाचे गुणधर्म आणि प्रतिपगमन रेषेचे गुणधर्म याची ही अभ्यास केला. प्रतपिगमन प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटी व त्याचे महत्त्व अभ्यासले. प्रतिपगमन विश्लेषणाचा वापर सामाजिक शास्त्रामध्ये तसेच इतर शास्त्रामध्ये सुद्धा मोठ्या प्रमाणात केला जातो. अर्थशास्त्रीय संशोधनात प्रतिपगमन विश्लेषणाला अनन्यसाधारण असे महत्त्व आहे.

४.७ पारिभाषिक शब्द

१.	प्रतिपगमन	: प्रतिपगमनाच्या सहाय्याने ज्ञात चलाच्या मूल्याच्या सहाय्याने अज्ञात चलाचे मूल्य माहित करता येते.
२.	सहसंबंध	: दोन घटकातील किंवा चलातील संबंधाची श्रेणी मोजते.
३.	प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटी	: अनुमान किंवा अंदाज हे तंतोतंत बरोबर किंवा चुकीचे आहे ते सांगते.
४.	प्रतिपगमन समीकरण	: प्रतिपगमन रेषांचे बीजगणितीय भाव होय.

४.८ आपली प्रगती तपासा उत्तरे

आपली प्रगती तपासा - १

१) – 3

२) Y चा X वरील प्रतिपगमन गुणांक

३) कारण आणि परिणाम प्रस्थापित करते

४) 26

५) एक पेक्षा लहान असेल

आपली प्रगती तपासा - २

१) प्रतिपगमन हे असे सांख्यिकीय तंत्र आहे ज्याच्या सहाय्याने आपणास ज्ञात चलाच्या मूल्याच्या सहाय्याने अज्ञात चलाचे मूल्य माहित करता येते.

२) $\sum X = na + b\sum Y$

$\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2$

३) X चे Y वरील किंवा Y चे X वरील अंदाज किंवा अनुमान किती तंतोतंत आहेत किंवा ते कसे चुकीचे आहेत हे सांगणाऱ्या परिमाणाला प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटी असे म्हणतात.

४) प्रतिपगमन गुणांकाचे गुणधर्म

१) दोन प्रतिपगमन गुणांकाच्या भूमितीय माध्यापासून सहसंबंध गुणांकाचे मूल्य मिळते.

२) दोन्ही प्रतिपगमन गुणांकाचे गणितीय चिन्ह समान असते.

५) प्रतिपगमनाचे उपयोग

१) अंदाज वर्तविणे

२) सहसंबंध काढता येतो

४.९ स्वाध्याय

१. खालील माहितीच्या आधारे दोन प्रतिपगमन समीकरणे काढा.

पतीचे वय	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
पत्नीचे वय	18	18	19	19	19	20	20	21	22	23

२. पुढील तक्त्यात विद्यार्थ्यांनी अर्थशास्त्र विषयाच्या दोन पेपरमध्ये 100 पैकी मिळविलेले गुण दिलेले आहेत. त्यावरून दोन प्रतिपगमन समीकरणे काढा.

पेपर I	81	46	56	57	59	61	66	69	71	76
पेपर II	82	56	52	50	61	63	65	66	71	75

३. पुढे वडिलांची व त्यांच्या मुलांची उंची दिलेली आहे त्या सहाय्याने दोन प्रतिपगमन समीकरणे तयार करा व वडिलांची उंची 68 इंच असताना मुलाची अपेक्षित उंची माहित करा.

वडिलांची उंची (इंच)	67	65	69	69	69	70	72	75
मुलांची उंची (इंच)	67	68	64	69	73	71	73	70

४. खालील माहितीच्या आधारे प्रतिपगमन समीकरणे आणि प्राककलनाचे प्रमाण दोष माहिती करा.

X	11	9	13	16	19	21
Y	51	52	56	59	61	66

५. खालील दिलेल्या उपभोग (C) आणि उत्पन्न (Y) च्या माहितीच्या आधारे प्रतिपगमन समीकरण तयार करा.

उपभोग	95	100	105	110	120
उत्पन्न	105	115	125	135	145

६. अर्थशास्त्र आणि संख्याशास्त्र विषयातील विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या गुणांचा अभ्यास केला असता खालील माहिती मिळते.

	अर्थशास्त्र	संख्याशास्त्र
माध्य	40.5	48.5
प्रमाण विचलन	11.8	17.8
सहसंबंध गुणांक	0.52	

यावरून,१) दोन प्रतिपगमन समीकरणे माहित करा.

२) X = 60 असताना Y चे अपेक्षित मूल्य काढा.

३) Y = 40 असताना X चे अपेक्षित मूल्य काढा.

७. टिपा लिहा.

१) प्रतिपगमन

२) प्रतिपगमनाचे महत्त्व

३) आलेख अभ्यास पद्धती

४) मुक्त हस्त वक्र पद्धती

५) प्रतिपगमन गुणांकाचे गुणधर्म

६) प्राककलनाच्या प्रमाण त्रुटी

४.१० संदर्भ

१. डॉ. वा. भा. पाटील (२००६), संशोधन पद्धती, प्रशांत पब्लिकेशन, जळगाव.

२. प्रा. राम देशमुख (२०११), मुलभूत साख्यिकी, विद्या प्रकाशन, नागपूर.

३. डॉ. विश्वास कदम (२०१४), साख्यिकी पद्धती, कैलास पब्लिकेशन, औरंगाबाद.

४. डॉ. प्रदिप आगलावे (२०००), संशोधन पद्धती, विद्या प्रकाशन, नागपूर.

५. Gupta, S. P. (2014), Statistical Methods, Sultan Chand and Sons, New Delhi.

६. Elhance, Elhance, Aggarwal (2015), Fundamentals of Statistics, Kitab Mahal, New Delhi.

❑ ❑ ❑